



Temporální logika

Temporální operátory \circ , \square , \diamond se (anglicky) nazývají

\circ *nexttime* nebo jen *next*,

\square *always* nebo *henceforth* a

\diamond *sometime*.

Formule $\circ A$, $\square A$ a $\diamond A$ se (anglicky) čtou

$\circ A$: *nextA*, česky *příště A*,

$\square A$: *alwaysA*, česky *vždy A*

$\diamond A$: *sometimeA*, česky *někdy A*

Preference \neg , \circ , \square , \diamond váží silněji než \vee , \wedge , \rightarrow a \equiv má nejslabší prioritu.

Temporální operátory a přirozený jazyk

- α nechť znamená „Měsíc obíhá Zemi“,
- β nechť znamená „Měsíc vychází“,
- γ nechť znamená „Měsíc zapadá“.

- $\diamond\beta$, která vyjadřuje tvrzení „Měsíc někdy vyjde“,
- $\square\diamond\beta$ s významem „Měsíc bude vycházet znovu a znovu“,
- $\square(\beta \rightarrow \diamond\gamma)$ s významem „vždy po východu měsíce bude někdy následovat jeho západ“.

Formální systém LTL

Pro libovolné formule A , B jsou následující formule **axiomy LTL**:

- **(Taut)** tvoří instance všech tautologií výrokové logiky,
- **(LTL 1)** vyjadřuje $\neg \circ A \leftrightarrow \circ \neg A$,
- **(LTL 2)** představuje $\circ(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\circ A \rightarrow \circ B)$,
- **(LTL 3)** značí $\Box A \leftrightarrow (A \wedge \circ \Box A)$.

Odvozovací pravidla LTL:

- **(modus ponens)** umožňuje z formulí A a $A \rightarrow B$ odvodit B ,
- **(next)** představuje postup odvození $\circ A$ z formule A ,
- **(indukce)** dovoluje z formulí $A \rightarrow B$ a $A \rightarrow \circ A$ odvodit $A \rightarrow \Box B$

Popis komplexního systému – dobře fungující úřad

- Jeli požadavek podán, pak bude někdy doručen na správné místo
□(**požadavek** → ◇**doručen**),
- Je-li požadavek doručen, pak jeho zpracování bude zahájeno hned v následujícím okamžiku
□(*doručen* → ◦*zpracováván*),
- Zpracováváný požadavek bude jednou vyřízen (hotov) a pak už zůstane hotov (nebude se znovu otevírat)
□(*zpracováván* → ◇□*hotov*).

Uvedené formule charakterizují chování komplexního systému, označíme je jako program **P** pro tento systém. Zdá se, že nemůže nastat situace, ve které by systém stále vysílal stejný požadavek, ale ten by nebyl nikdy hotov. Lze se o tom přesvědčit? Na přednášce ukážeme, že formule □ **požadavek** & □ **¬hotov** nemůže platit, čili tato formule je s uvedeným programem **P** nekonzistentní.



Nejprve postupujeme pozitivně a použijeme tato obecně platná tvrzení:

- a) $\Box A \rightarrow \Diamond A,$
- b) $\circ A \rightarrow \Diamond A,$
- c) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B),$
- d) $\Diamond(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B),$
- e) $\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Diamond A.$

Každý požadavek bude někdy vyřízen!

- i. $\Box(\text{požadavek} \rightarrow \Diamond \text{doručen})$,
- ii. $\Box(\text{doručen} \rightarrow \circ \text{zpracováván})$,
- iii. $\Box(\text{zpracováván} \rightarrow \Diamond \Box \text{hotov})$.

1. $\Box \text{požadavek} \rightarrow \Box \Diamond \text{doručen}$, podle i., c) a (mp)
2. $\Box \Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \Diamond \text{doručen}$ podle a)
3. $\Box(\text{doručen} \rightarrow \circ \text{zpracováván}) \rightarrow \Diamond(\text{doručen} \rightarrow \circ \text{zpracováván})$, podle a)
4. $\Diamond(\text{doručen} \rightarrow \circ \text{zpracováván})$, (mp) na 3. a ii
5. $\Diamond(\text{doručen} \rightarrow \circ \text{zpracováván}) \rightarrow (\Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \circ \text{zpracováván})$, podle d)
6. $(\Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \circ \text{zpracováván}) \rightarrow (\Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \Diamond \text{zpracováván})$, s využitím b), 4. a (taut)
7. $(\Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \Diamond \text{zpracováván})$, vícenásobné použití (mp) pro 4.-6.
6. $\Diamond \Diamond \text{zpracováván} \rightarrow \Diamond \text{zpracováván}$, podle e)
7. $\Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \text{zpracováván}$, z (taut) a 6., 7.
8. $\Box \Diamond \text{doručen} \rightarrow \Box \Diamond \text{zpracováván}$, 7., e) a (mp)
9. $\Diamond \text{zpracováván} \rightarrow \Diamond \Diamond \Box \text{hotov}$, s využitím iii., a), d) a (taut)
10. $\Diamond \text{zpracováván} \rightarrow \Diamond \Box \text{hotov}$, (taut), (mp), 8. a e)
11. $\Box \Diamond \text{zpracováván} \rightarrow \Box \Diamond \Box \text{hotov}$, využití c) na 10.
12. $\Box \text{požadavek} \rightarrow \Box \Diamond \Box \text{hotov}$ „zřetězení“ 1, 8. a 11.

Ověřili jsme, že $\Box(\text{požadavek} \rightarrow \Diamond \Box \text{hotov})$



Příklady zdrojů dalších informací:

- Huth M., Ryan M.: *Logic in Computer Science*, Cambridge University Press, 2004
- Programový systém **SPIN**

Samostatná práce 3 (2 body)

Vyřešte jednu z následujících 2 úloh podle vlastního výběru:

1. Zvolte si jedno z následujících tvrzení $\diamond \square \diamond \square \mathbf{A} \equiv \diamond \square \mathbf{A} \square \diamond$ nebo $\square \diamond \mathbf{A} \equiv \square \diamond \mathbf{A}$ a ověřte, že v LTL skutečně platí.
2. Mořeplavec se vypravil hledat ostrov *Poctivců a padouchů*, který byl popsán v první bonusové úloze. Zastihla ho bouře a ztroskotal na pobřeží neznámého ostrova. Za chvíli se objevil domorodec, který ho přivítal slovy: „*Nikdy se nedozvíte o mojí poctivosti (tj. o tom, že jsem poctivec).*“
Je mořeplavec u cíle své cesty?