OPT'17-18 Test 4	Jméno:	Opravil: TW Body:

Postupy a výsledky pište na tento papír do připravených mezer. Jiné papíry neodevzdávejte. U každé úlohy napište nejen výsledek, ale i postup. Samotný výsledek bez postupu nestačí.

1. **(1b)** Je množina $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3,\ x \geq 0 \}$ konvexní? Odpověď dokažte z definice konvexní množiny (obrázek nestačí).

   Není konvexní, důkaz: zvolme dva body z množiny, např. $\mathbf{x} = (0, 0)$ a $\mathbf{y} = (1, 1)$. Zvolme $\alpha \in [0, 1]$, např. $\alpha = 1/2$. Pak bod $(1 - \alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} = (1/2, 1/2)$ musí taky patřit do množiny, což není pravda, protože $(1/2)^3 \neq 1/2$.

2. Mějme úlohu $\max\{ \mathbf{a}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{1}^T\mathbf{x} \leq 1 \}$, kde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je dáno. Vyřešte úlohu úvahou a splňte tyto úkoly:

   (a) **(1b)** Napište množinu optimálních řešení (tj. množinu všech $\mathbf{x}$, pro které se nabývá optimum) a optimální hodnotu úlohy pro $\mathbf{a} = (-2, -4, 0, 1)$.

   Opt. hodnota 1, množina opt. řešení má jeden prvek $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 1)$

   (b) **(1b)** Napište množinu optimálních řešení a optimální hodnotu úlohy pro $\mathbf{a} = (-2, -4, 0, -1)$.

   Opt. hodnota 0. Množina opt. řešení je $\{ (0, 0, x_3, 0) \mid 0 \leq x_3 \leq 1 \}$.

   (c) **(1b)** Napište co možná nejjednodušší vzorec pro hodnotu optimálního řešení pro obecné $\mathbf{a}$.

   Opt. hodnota je $\max\{0, a_1, \ldots, a_n\}$. Taky to jde napsat jako $\max_i \max\{0, a_i\}$ nebo $\max\{0, \max_i a_i\}$. Ale nemůžeme napsat např. $\max_i\{0, a_i\}$, to je syntaktický nesmysl.

3. Převeďte na LP nebo odůvodněte, proč to není možné:

   (a) **(1b)** $\max\{ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1 \}$ (kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ jsou dány)

   $\max\{ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ -1 \leq x_i \leq 1\ \forall i \}$

   (b) **(1b)** $\max\{ \|\mathbf{x}\|_1 \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \}$ (kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ jsou dány)

   Nejde to. Šlo by to, kdybychom minimalizovali.

4. **(1b)** Zemědělec má 10 ha pole na výsadbu pšenice a žita a chce osázet nejméně 7 ha. Má k dispozici 120 tis. Kč a celou výsadbu chce stihnout za ne více než 12 hodin. Osázení jednoho hektaru pšenice stojí 20 tis. Kč a trvá jednu hodinu. Osázení jednoho hektaru žita stojí 10 tis. Kč a trvá dvě hodiny. Pokud je zisk 50 tis. Kč za hektar pšenice a 30 tis. Kč za hektar žita, kolik pšenice a žita má zemědělec vysázet pro co největší zisk? Úlohu napište jako lineární program (ale již ho neřešte).

   $\max 50x + 30y$ z.p. $7 \leq x + y \leq 10$, $20x + 10y \leq 120$, $x + 2y \leq 12$, $x, y \geq 0$.

5. Lineární program $\min\{ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ je daný simplexovou tabulkou

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
-2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
2 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 6 \\
1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

   (a) **(1b)** Udělejte jednu iteraci simplexového algoritmu a napište výslednou simplexovou tabulku. Pokud to nejde, vysvětlete.

   Pivot může být jeden z těchto: $(3, 3)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$. Zde je výsledná simpl. tabulka pro pivot $(2, 1)$:

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 6 \\
\hline
0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 4
\end{array}
$$

   (b) **(1b)** Napište aktuální bázové řešení a hodnotu kritéria po této iteraci. Je aktuální bázové řešení optimální?

   Bázové řešení je $(3, 0, 0, 4, 0, 0)$. Hodnota kritéria je -6. Nedokážeme poznat, zda je aktuální řešení optimální (to je postačující odpověď). Dá se ukázat, že je optimální (ale to dělat nemusíte): sice je $c_5 < 0$, ale když sloupec 5 v příští iteraci vstoupí do báze, bázové řešení bude degenerované (x_5 bude nula) a tedy kritérium se nezmění. Opravdu, když bychom vstupní tapulku pivotovali kolem pivotu $(1, 1)$ místo $(2, 1)$, tak by všechny ceny byly nezáporné a kritérium -6.

6. **(1b)** Máme funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danou vzorcem $f(\mathbf{x}) = \min\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Pro jaká $n \in \mathbb{N}$ je tato funkce norma? Odpověď odůvodněte.

   Pro $n = 1$ je $f(x) = |x|$, což je norma. Pro $n \geq 2$ není splněn např. axiom $\|\mathbf{x}\| = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{0}$, např. pro $\mathbf{x} = (0, 1, \dots, 1)$.

Bodů celkem: 10