

Postupy a výsledky pište na tento papír do připravených mezer. Jiné papíry neodevzdávejte. U každé úlohy napište nejen výsledek, ale i postup. Řešení bez postupu nebude uznáno.

1. **(2b)** Najděte Taylorův polynom nultého, prvního a druhého stupně funkce $f(x, y) = x^2y$ v bodě $(1, -1)$. Výsledky upravte do co nejjednoduššího tvaru (jednoduchost výsledných výrazů se hodnotí).

$$T_0(x, y) = f(1, -1) = -1$$

$$f'(x, y) = [2xy \quad x^2]$$

$$T_1(x, y) = T_0(x, y) + f'(1, -1)[x - 1 \quad y + 1]^T = -1 + [-2 \quad 1][x - 1 \quad y + 1]^T = y - 2x + 2$$

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2(x, y) = T_1(x, y) + [x - 1 \quad y + 1]f''(1, -1)[x - 1 \quad y + 1]^T/2 = y - 2x + 2 - (x - 1)^2 + 2(x - 1)(y + 1) = 2xy - x^2 + 2x - y - 1$$

2. Máme funkci $f(x, y) = 1/x + xy - y$.

- (a) **(1b)** Najděte všechny stacionární body funkce.

Soustava $f'(x, y) = [-1/x^2 + y \quad x - 1] = [0 \quad 0]$ má jediné řešení $(x, y) = (1, 1)$, což je jediný stacionární bod.

- (b) **(1b)** Pro každý stacionární bod určete, zda je to lokální extrém a když ano, tak jakého typu.

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 2/x^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla Hessianu $f''(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ jsou řešením rovnice

$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)\lambda - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$, tedy $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$. Tedy Hessian je indefinitní, tedy stacionární bod je sedlo (tj. není to lokální extrém),

3. **(2b)** Vypočítejte číslo $2^{1/3}$ s největší přesností, jakou dokážete. Použít smíte jen kalkulačku a na ní jen tlačítka $+$, $-$, \times , $/$, $=$, uložení do paměti a vyvolání z paměti. Do postupu napište kromě výsledku i hodnoty x pro alespoň první tři iterace algoritmu.

Newtonova metoda na rovnici $g(x) = x^3 - 2 = 0$.

Její iterace je $x_{k+1} \leftarrow x_k - g(x_k)/g'(x_k) = x_k - (x_k^3 - 2)/(3x_k^2) = \frac{2}{3}(x_k + 1/x_k^2)$. Zvolíme např. $x_0 = 1$, pak $x_1 = 4/3$, $x_2 = 1.2638$. Po páté iteraci (v Matlabu, na kalkulačce mmožná dřív) se x_k už nemění, výsledek je $x_5 = 1.259921049894873$.

4. **(2b)** Soustavu dvou rovnic o jedné neznámé

$$x^2 + x = 1$$

$$x^2 - x = 1$$

chceme řešit přibližně ve smyslu nejmenších čtverců. Napište iteraci čisté Gauss-Newtonovy metody. Výsledný vzorec nemusíte příliš zjednodušovat, ale určitě do něj dosad'te.

$$\mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} x^2 + x - 1 \\ x^2 - x - 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}'(x) = \begin{bmatrix} 2x + 1 \\ 2x - 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Iterace: } x \leftarrow x - (\mathbf{g}'(x)^T \mathbf{g}'(x))^{-1} \mathbf{g}'(x)^T \mathbf{g}(x) = x - (8x^2 + 2)^{-1} [2x + 1 \quad 2x - 1] \begin{bmatrix} x^2 + x - 1 \\ x^2 - x - 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Kdybychom to zjednodušili (což nemusíme), máme } x \leftarrow x - \frac{4x^3 - 2x}{8x^2 + 2} = x - \frac{2x^3 - x}{4x^2 + 1} = \frac{2x(x^2 + 1)}{4x^2 + 1}$$

5. **(2b)** Najděte všechny extrémy funkce $f(x, y) = x + 2y$ na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Rešte úvahou a tuto úvahu ilustrujte obrázkem, na kterém bude několik vrstevnic funkce f a množina.

Graf je horní p'ulka kladné větve hyperboly. Vrstevnice výšky 0 je přímka procházející počátkem kolmá k vektoru $(1, 2)$, ostatní vrstevnice jsou s ní rovnoběžné. Jedno globální minimum v bodě $(1, 1)$, jiná lokální minima nejsou. Lokální maxima nejsou.