OPT'17-18 Test 3 | **Jméno:** | **Opravil: TW Body:**

Postupy a výsledky pište na tento papír do připravených mezer. Jiné papíry neodevzdávejte. U každé úlohy napište nejen výsledek, ale i postup. Řešení bez postupu nebude uznáno.

---

1. **(2b)** Najděte Taylorův polynom nultého, prvního a druhého stupně funkce $f(x,y) = x^2y$ v bodě $(1,-1)$. Výsledky upravte do co nejjednoduššího tvaru (jednoduchost výsledných výrazů se hodnotí).

   $T_0(x,y) = f(1,-1) = -1$
   $f'(x,y) = [2xy \;\; x^2]$
   $T_1(x,y) = T_0(x,y) + f'(1,-1)[x-1 \;\; y+1]^T = -1 + [-2 \;\; 1][x-1 \;\; y+1]^T = y - 2x + 2$
   $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$
   $T_2(x,y) = T_1(x,y) + [x-1 \;\; y+1]f''(1,-1)[x-1 \;\; y+1]^T/2 = y - 2x + 2 - (x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) = 2xy - x^2 + 2x - y - 1$

2. Máme funkci $f(x,y) = 1/x + xy - y$.

   (a) **(1b)** Najděte všechny stacionární body funkce.
   Soustava $f'(x,y) = [-1/x^2 + y \;\; x-1] = [0 \;\; 0]$ má jediné řešení $(x,y) = (1,1)$, což je jediný stacionární bod.

   (b) **(1b)** Pro každý stacionární bod určete, zda je to lokální extrém a když ano, tak jakého typu.
   $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2/x^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
   Vlastní čísla Hessianu $f''(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ jsou řešením rovnice
   $\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda-2)\lambda - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$, tedy $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$. Tedy Hessian je indefinitní, tedy stacionární bod je sedlo (tj. není to lokální extrém),

3. **(2b)** Vypočítejte číslo $2^{1/3}$ s největší přesností, jakou dokážete. Použít smíte jen kalkulačku a na ní jen tlačítka $+$, $-$, $\times$, $/$, $=$, uložení do paměti a vyvolání z paměti. Do postupu napište kromě výsledku i hodnoty x pro alespoň první tři iterace algoritmu.

   Newtonova metoda na rovnici $g(x) = x^3 - 2 = 0$.
   Její iterace je $x_{k+1} \leftarrow x_k - g(x_k)/g'(x_k) = x - (x^3-2)/(3x^2) = \frac{2}{3}(x + 1/x^2)$. Zvolíme např. $x_0 = 1$, pak $x_1 = 4/3$, $x_2 = 1.263\overline{8}$. Po páté iteraci (v Matlabu, na kalkukačce mmožná dřív) se x_k už nemění, výsledek je $x_5 = 1.259921049894873$.

4. **(2b)** Soustavu dvou rovnic o jedné neznámé

$$x^2 + x = 1$$
$$x^2 - x = 1$$

   chceme řešit přibližně ve smyslu nejmenších čtverců. Napište iteraci čisté Gauss-Newtonovy metody. Výsledný vzorec nemusíte příliš zjednodušovat, ale určitě do něj dosaďte.

   $\mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} x^2 + x - 1 \\ x^2 - x - 1 \end{bmatrix}$
   $\mathbf{g}'(x) = \begin{bmatrix} 2x+1 \\ 2x-1 \end{bmatrix}$
   Iterace: $x \leftarrow x - (\mathbf{g}'(x)^T\mathbf{g}'(x))^{-1}\mathbf{g}'(x)^T\mathbf{g}(x) = x - (8x^2+2)^{-1}\begin{bmatrix} 2x+1 & 2x-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^2+x-1 \\ x^2-x-1 \end{bmatrix}$.
   Kdybychom to zjednodušili (což nemusíme), máme $x \leftarrow x - \dfrac{4x^3-2x}{8x^2+2} = x - \dfrac{2x^3 - x}{4x^2+1} = \dfrac{2x(x^2+1)}{4x^2+1}$

5. **(2b)** Najděte všechny extrémy funkce $f(x,y) = x + 2y$ na množině $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\; 0 \le x \le 1\,\}$. Reště úvahou a tuto úvahu ilustrujte obrázkem, na kterém bude několik vrstevnic funkce f a množina.

   Globální minimum v bodě $(1,1)$.

Bodů celkem: 10