OPT'17-18 Test 2 | **Jméno:** **Opravil:** **Body:**

Postupy a výsledky pište na tento papír do připravených mezer. Jiné papíry neodevzdávejte. U každé úlohy napište nejen výsledek, ale i postup. Řešení bez postupu nebude uznáno.

---

1. Máme funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou vzorcem $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$.

   (a) **(1b)** Napište funkci f ve tvaru $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a matice $\mathbf{A}$ je symetrická. (Výsledek bude matice $\mathbf{A}$.)

   $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) **(1b)** Najděte vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

   $(\lambda - 1)(\lambda - 3) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$, tedy $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$.

   (c) **(1b)** Zakroužkujte pravdivá tvrzení: matice $\mathbf{A}$ je

   - positivně definitní ANO
   - negativně definitní
   - positivně semidefinitní ANO
   - negativně semidefinitní
   - indefinitní

   (d) **(1b)** Má funkce f extrém? Pokud ano, tak jakého typu (minimum nebo maximum) a v jakých bodech se nabývá? Odpovědi odůvodněte.

   f je pos. definitní, tedy $f(\mathbf{x}) > 0$ pro každé $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tedy f má minimum v bodě $(x_1, x_2) = (0, 0)$ a nikde jinde.

2. Máme funkci $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + x_1 - x_2$, kde funkce f je jako v předchozím příkladu.

   (a) **(1b)** Napište funkci g ve tvaru $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a matice $\mathbf{A}$ je symetrická. (Výsledek bude matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$.)

   $\mathbf{A}$ jako předtím, $\mathbf{b} = (1, -1)$.

   (b) **(2b)** Napište funkci g ve tvaru $g(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{d})^T\mathbf{C}(\mathbf{x} - \mathbf{d}) + e$, kde matice $\mathbf{C}$ je symetrická. (Výsledek bude matice $\mathbf{C}$, vektor $\mathbf{d}$ a skalár e.)

   $\mathbf{C} = \mathbf{A}$, $\mathbf{d} = (-\frac{1}{2}, 0)$, $e = -\frac{1}{4}$

   (c) **(1b)** Má funkce g extrém? Pokud ano, tak jakého typu (minimum nebo maximum) a v jakých bodech se nabývá? Odpovědi odůvodněte.

   Má minimum v bodě $\mathbf{d}$ a v žádném jiném. Je to posunutá kvadratická forma, kterou jsme vyšetřili v předchozím případu.

3. **(2b)** Máme body $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^3$ a hledáme přímku procházející pořátkem takovou, že součet čtverců (kolmých) vzdáleností bodů ke přímce je minimální. Napište matlabskou funkci `[U,V]=fitpoints(X)`, kde

   - `X` je matice $3 \times m$, jejíž sloupce jsou dané body,
   - `U` je vektor 3×1, který je směrovým vektorem hledané přímky,
   - `V` je matice 3×2, jejíž sloupce tvoří ortonormální bázi ortogonálního doplňku hledané přímky.

   Pomocí spektrálního rozkladu:

```
function [U,V] = fitpoints(X)
[V,D] = eig(X*X'); % ne X*X', protože body jsou sloupce X, ne řádky
U = V(:,3); % eig řadí vlastní čísla vzestupně
V = V(:,1:2);
```

   Pomocí singulárního rozkladu:

```
function [U,V] = fitpoints(X)
[U,S] = svd(X,'econ'); % matici V nepotřebujeme; 'econ' možno vynechat
V = U(:,2:3); % svd řadí sing. čísla sestupně
U = U(:,1);
```

Bodů celkem: 10