

# Simplexová metoda na řešení lineárního programování

Tomáš Werner

(Netiskněte, obsahuje animace!)

Vstupní mnohostěn  $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$  kde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\text{rank } \mathbf{A} = m$ .

- ▶ **Báze** je množina  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  taková, že  $|J| = m$  a sloupce matice  $\mathbf{A}$  s indexy  $J$  jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici  $m \times m$ ).
- ▶ **Bázové řešení** příslušné bázi  $J$  je řešení  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  takové, že  $x_j = 0$  pro všechna  $j \notin J$ . Je právě jedno.
- ▶ Bázové řešení  $\mathbf{x}$  je **přípustné**, pokud  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .
- ▶ Bázové řešení  $\mathbf{x}$  je **degenerované**, pokud má méně než  $m$  nenulových složek.

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \begin{array}{cccccccc} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 & \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 & \end{array}$$



Vstupní mnohostěn  $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$  kde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\text{rank } \mathbf{A} = m$ .

- ▶ **Báze** je množina  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  taková, že  $|J| = m$  a sloupce matice  $\mathbf{A}$  s indexy  $J$  jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici  $m \times m$ ).
- ▶ **Bázové řešení** příslušné bázi  $J$  je řešení  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  takové, že  $x_j = 0$  pro všechna  $j \notin J$ . Je právě jedno.
- ▶ Bázové řešení  $\mathbf{x}$  je **přípustné**, pokud  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .
- ▶ Bázové řešení  $\mathbf{x}$  je **degenerované**, pokud má méně než  $m$  nenulových složek.

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

- ▶  $\{2, 3, 5\}$  není báze (sloupce jsou lineárně závislé)

Vstupní mnohostěn  $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$  kde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\text{rank } \mathbf{A} = m$ .

- ▶ **Báze** je množina  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  taková, že  $|J| = m$  a sloupce matice  $\mathbf{A}$  s indexy  $J$  jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici  $m \times m$ ).
- ▶ **Bázeové řešení** příslušné bázi  $J$  je řešení  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  takové, že  $x_j = 0$  pro všechna  $j \notin J$ . Je právě jedno.
- ▶ Bázeové řešení  $\mathbf{x}$  je **přípustné**, pokud  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .
- ▶ Bázeové řešení  $\mathbf{x}$  je **degenerované**, pokud má méně než  $m$  nenulových složek.

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] &= \begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array} \\ \mathbf{x} &= \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array} \end{aligned}$$

- ▶  $\{1, 4, 5\}$  je báze. Bázeové řešení  $\mathbf{x}$  je řešením soustavy

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = x_3 = x_6 = 0.$$

Je přípustné, není degenerované.

Vstupní mnohostěn  $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$  kde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\text{rank } \mathbf{A} = m$ .

- ▶ **Báze** je množina  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  taková, že  $|J| = m$  a sloupce matice  $\mathbf{A}$  s indexy  $J$  jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici  $m \times m$ ).
- ▶ **Bázové řešení** příslušné bázi  $J$  je řešení  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  takové, že  $x_j = 0$  pro všechna  $j \notin J$ . Je právě jedno.
- ▶ Bázové řešení  $\mathbf{x}$  je **přípustné**, pokud  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .
- ▶ Bázové řešení  $\mathbf{x}$  je **degenerované**, pokud má méně než  $m$  nenulových složek.

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] &= \begin{array}{cccccccc} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array} \\ \mathbf{x} &= \begin{array}{cccccc} 4 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array} \end{aligned}$$

- ▶  $\{1, 2, 4\}$  je báze. Bázové řešení je nepřípustné, není degenerované.

Vstupní mnohostěn  $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$  kde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\text{rank } \mathbf{A} = m$ .

- ▶ **Báze** je množina  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  taková, že  $|J| = m$  a sloupce matice  $\mathbf{A}$  s indexy  $J$  jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici  $m \times m$ ).
- ▶ **Bázové řešení** příslušné bázi  $J$  je řešení  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  takové, že  $x_j = 0$  pro všechna  $j \notin J$ . Je právě jedno.
- ▶ Bázové řešení  $\mathbf{x}$  je **přípustné**, pokud  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .
- ▶ Bázové řešení  $\mathbf{x}$  je **degenerované**, pokud má méně než  $m$  nenulových složek.

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] &= \begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array} \\ \mathbf{x} &= \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \end{aligned}$$

- ▶  $\{3, 4, 5\}$  je báze. Bázové řešení je nepřípustné a degenerované.

Vstupní mnohostěn  $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$  kde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\text{rank } \mathbf{A} = m$ .

- ▶ **Báze** je množina  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  taková, že  $|J| = m$  a sloupce matice  $\mathbf{A}$  s indexy  $J$  jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici  $m \times m$ ).
- ▶ **Bázeové řešení** příslušné bázi  $J$  je řešení  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  takové, že  $x_j = 0$  pro všechna  $j \notin J$ . Je právě jedno.
- ▶ Bázeové řešení  $\mathbf{x}$  je **přípustné**, pokud  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .
- ▶ Bázeové řešení  $\mathbf{x}$  je **degenerované**, pokud má méně než  $m$  nenulových složek.

$$\begin{array}{r} [\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \\ \mathbf{x} = \end{array} \begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & \end{array}$$

- ▶ Stejné bázeové řešení odpovídá bázi  $\{3, 4, 6\}$ .  
Degenerované bázeové řešení odpovídá více než jedné bázi!

Simplexová metoda používá jen **standardní báze**. Výhody:

- ▶ Ihned vidíme bázové řešení  $\mathbf{x}$ : jeho nenulové složky jsou složky  $\mathbf{b}$ .
- ▶ Tedy: bázové řešení  $\mathbf{x}$  je přípustné  $\Leftrightarrow \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

$$\begin{array}{r}
 [\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \begin{array}{cccccc}
 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1
 \end{array} \\
 \\
 \mathbf{x} = \begin{array}{cccccc}
 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Bázové řešení příslušné (standardní) bázi  $\{1, 4, 5\}$  je řešením soustavy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_3 = x_6 = 0$$



Ekvivalentní řádkové úpravy:

- ▶ Řádek matice  $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$  vynásob nenulovým číslem.
- ▶ K řádku matice  $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$  přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Nemění množinu řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Chceme bázový sloupec  $j' \in J$  nahradit nebázovým sloupcem  $j \notin J$ :

- ▶ Necht'  $i$  je řádek, kde  $a_{ij'} = 1$ . Prvek  $(i, j)$  se nazývá **pivot**.
- ▶ Proveď **ekvivalentní úpravu kolem pivotu**  $(i, j)$ , tj. nastav  $a_{ij} = 1$  a  $a_{i'j} = 0$  pro každé  $i' \neq i$ :

Ekvivalentní řádkové úpravy:

- ▶ Řádek matice  $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$  vynásob nenulovým číslem.
- ▶ K řádku matice  $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$  přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Nemění množinu řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Chceme bázový sloupec  $j' \in J$  nahradit nebázovým sloupcem  $j \notin J$ :

- ▶ Necht'  $i$  je řádek, kde  $a_{ij'} = 1$ . Prvek  $(i, j)$  se nazývá **pivot**.
- ▶ Proveď **ekvivalentní úpravu kolem pivotu**  $(i, j)$ , tj. nastav  $a_{ij} = 1$  a  $a_{i'j} = 0$  pro každé  $i' \neq i$ :

$$\begin{array}{cccccccc} & & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ & & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ i & & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ & & & j & & & j' & & \end{array}$$

Ekvivalentní řádkové úpravy:

- ▶ Řádek matice  $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$  vynásob nenulovým číslem.
- ▶ K řádku matice  $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$  přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Nemění množinu řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Chceme bázev sloupec  $j' \in J$  nahradit nebázevým sloupcem  $j \notin J$ :

- ▶ Necht'  $i$  je řádek, kde  $a_{ij'} = 1$ . Prvek  $(i, j)$  se nazývá **pivot**.
- ▶ Proved' **ekvivalentní úpravu kolem pivotu**  $(i, j)$ , tj. nastav  $a_{ij} = 1$  a  $a_{i'j} = 0$  pro každé  $i' \neq i$ :
  - 1 Vyděl řádek  $i$  pivotem  $a_{ij}$ .

$$\begin{array}{cccccccc} & & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ & & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ i & & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ & & & j & & & j' & & \end{array}$$

Ekvivalentní řádkové úpravy:

- ▶ Řádek matice  $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$  vynásob nenulovým číslem.
- ▶ K řádku matice  $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$  přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Nemění množinu řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Chceme bázev sloupec  $j' \in J$  nahradit nebázevým sloupcem  $j \notin J$ :

- ▶ Necht'  $i$  je řádek, kde  $a_{ij'} = 1$ . Prvek  $(i, j)$  se nazývá **pivot**.
- ▶ Proveď **ekvivalentní úpravu kolem pivotu**  $(i, j)$ , tj. nastav  $a_{ij} = 1$  a  $a_{i'j} = 0$  pro každé  $i' \neq i$ :
  - 1 Vyděl řádek  $i$  pivotem  $a_{ij}$ .
  - 2 Pro každé  $i' \neq i$  odečti  $a_{i'j}$ -násobek řádku  $i$  od řádku  $i'$ .

$$\begin{array}{cccccccc} & & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ & & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ i & & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ & & & j & & & j' & & \end{array}$$

Ekvivalentní řádkové úpravy:

- ▶ Řádek matice  $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$  vynásob nenulovým číslem.
- ▶ K řádku matice  $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$  přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Nemění množinu řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Chceme bázový sloupec  $j' \in J$  nahradit nebázovým sloupcem  $j \notin J$ :

- ▶ Necht'  $i$  je řádek, kde  $a_{ij'} = 1$ . Prvek  $(i, j)$  se nazývá **pivot**.
- ▶ Proveď **ekvivalentní úpravu kolem pivotu**  $(i, j)$ , tj. nastav  $a_{ij} = 1$  a  $a_{i'j} = 0$  pro každé  $i' \neq i$ :
  - 1 Vyděl řádek  $i$  pivotem  $a_{ij}$ .
  - 2 Pro každé  $i' \neq i$  odečti  $a_{i'j}$ -násobek řádku  $i$  od řádku  $i'$ .

$$\begin{array}{cccccccc} & & 0 & \mathbf{0} & 8 & 1 & 2 & 8 & 6 \\ & & 1 & \mathbf{0} & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ i & & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ & & & j & & & j' & & \end{array}$$

## Bude nové bázevé řešení přípustné?

Nechť  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ . Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu  $(i, j)$  zůstane  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ?

Jak se změní  $\mathbf{b}$  po ekv. úpravě kolem pivotu  $(i, j)$ ?

- ▶  $b_i$  se změní na  $b_i/a_{ij}$ .
- ▶ Pro každé  $i' \neq i$  se  $b_{i'}$  změní na  $b_{i'} - a_{i'j}b_i/a_{ij}$ .

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- ▶  $a_{ij} > 0$
- ▶ Pro každé  $i' \neq i$  platí  $(a_{i'j} \leq 0)$  nebo  $(b_i/a_{ij} \leq b_{i'}/a_{i'j})$ .

## Bude nové báзовé řešení přípustné?

Nechť  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ . Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu  $(i, j)$  zůstane  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ?

Jak se změní  $\mathbf{b}$  po ekv. úpravě kolem pivotu  $(i, j)$ ?

- ▶  $b_i$  se změní na  $b_i/a_{ij}$ .
- ▶ Pro každé  $i' \neq i$  se  $b_{i'}$  změní na  $b_{i'} - a_{i'j}b_i/a_{ij}$ .

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- ▶  $a_{ij} > 0$
- ▶ Pro každé  $i' \neq i$  platí  $(a_{i'j} \leq 0)$  nebo  $(b_i/a_{ij} \leq b_{i'}/a_{i'j})$ .

0	2	6	1	0	4	4
1	1	3	0	0	2	3
0	-1	1	0	1	2	1

- ▶ Po úpravě kolem pivotu  $(3, 2)$  **nebude**  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , neboť  $-1 \not\geq 0$ .

## Bude nové bázové řešení přípustné?

Nechť  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ . Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu  $(i, j)$  zůstane  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ?

Jak se změní  $\mathbf{b}$  po ekv. úpravě kolem pivotu  $(i, j)$ ?

- ▶  $b_i$  se změní na  $b_i/a_{ij}$ .
- ▶ Pro každé  $i' \neq i$  se  $b_{i'}$  změní na  $b_{i'} - a_{i'j}b_i/a_{ij}$ .

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- ▶  $a_{ij} > 0$
- ▶ Pro každé  $i' \neq i$  platí  $(a_{i'j} \leq 0)$  nebo  $(b_i/a_{ij} \leq b_{i'}/a_{i'j})$ .

0	2	6	1	0	4	4
1	1	3	0	0	2	3
0	-1	1	0	1	2	1

- ▶ Po úpravě kolem pivotu  $(3, 2)$  **nebude**  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , neboť  $-1 \not\geq 0$ .
- ▶ Po úpravě kolem pivotu  $(3, 2)$  **nebude**  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , neboť  $\frac{3}{1} \not\geq \frac{4}{2}$



## Bude nové bázevé řešení přípustné?

Nechť  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ . Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu  $(i, j)$  zůstane  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ?

Jak se změní  $\mathbf{b}$  po ekv. úpravě kolem pivotu  $(i, j)$ ?

- ▶  $b_i$  se změní na  $b_i/a_{ij}$ .
- ▶ Pro každé  $i' \neq i$  se  $b_{i'}$  změní na  $b_{i'} - a_{i'j}b_i/a_{ij}$ .

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- ▶  $a_{ij} > 0$
- ▶ Pro každé  $i' \neq i$  platí  $(a_{i'j} \leq 0)$  nebo  $(b_i/a_{ij} \leq b_{i'}/a_{i'j})$ .

0	2	6	1	0	4	4
1	1	3	0	0	2	3
0	-1	1	0	1	2	1

- ▶ Po úpravě kolem pivotu  $(3, 2)$  **nebude**  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , neboť  $-1 \not\geq 0$ .
- ▶ Po úpravě kolem pivotu  $(3, 2)$  **nebude**  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , neboť  $\frac{3}{1} \not\geq \frac{4}{2}$
- ▶ Po úpravě kolem pivotu  $(3, 6)$  **bude**  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , neboť  $2 > 0$ ,  $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$ ,  $\frac{1}{2} \leq \frac{4}{4}$ .

Když jsou všechny prvky v nebázovém sloupci  $j \notin J$  nekladné:

- ▶ Sloupec  $j$  se nemůže stát bázovým (nelze v něm vybrat pivot).
- ▶ Existuje směr  $\mathbf{v}$  tak, že  $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v} \in X$  pro každé  $\alpha \geq 0$   
( $\Rightarrow$  mnohostěn obsahuje polopřímku, tedy je **neomezený**).

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \begin{array}{ccccccc} & 0 & -2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{v} = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Vektor  $\mathbf{v}$  je řešením soustavy

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$v_j = 1$$

$$v_{j'} = 0 \quad \forall j' \notin J, j' \neq j$$

Řešení: bázové složky  $\mathbf{v}$  jsou rovny minus prvky sloupce  $j$ .

Lineární program

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} - d \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

reprezentujeme **simplexovou tabulkou**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Přičti k prvnímu (účelovému) řádku tabulky lineární kombinaci ostatních řádků:

$$[\mathbf{c}'^T \quad d'] = [\mathbf{c}^T \quad d] + \mathbf{y}^T [\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = [\mathbf{c}^T + \mathbf{y}^T \mathbf{A} \quad d + \mathbf{y}^T \mathbf{b}]$$

Nová účelová funkce:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'^T \mathbf{x} - d' &= (\mathbf{c}^T + \mathbf{y}^T \mathbf{A})\mathbf{x} - (d + \mathbf{y}^T \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} - d + \mathbf{y}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} - d \quad \text{jestliže } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Hodnota účelové funkce zůstane stejná pro všechna řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$   
 $\Rightarrow$  úloha se nezmění.

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru  $\mathbf{c}$ , tj.  $c_j = 0$  pro  $j \in J$   
 (vždy přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci  $j$  jedničku).

$$\begin{array}{rcl}
 [\mathbf{c}^T & d] = & 1 \quad -2 \quad -3 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \quad 4 \\
 & & 0 \quad 2 \quad 6 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \\
 [\mathbf{A} & \mathbf{b}] = & 1 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \\
 & & 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\
 & & \\
 \mathbf{x} = & & 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru  $\mathbf{c}$ , tj.  $c_j = 0$  pro  $j \in J$   
 (vždy přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci  $j$  jedničku).

$$\begin{array}{rcl}
 [\mathbf{c}^T & d] = & 0 \quad -3 \quad -6 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \\
 & & 0 \quad 2 \quad 6 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \\
 [\mathbf{A} & \mathbf{b}] = & 1 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \\
 & & 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\
 & & \\
 \mathbf{x} = & & 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru  $\mathbf{c}$ , tj.  $c_j = 0$  pro  $j \in J$   
 (vždy přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci  $j$  jedničku).

$$\begin{array}{rcl}
 [\mathbf{c}^T & d] = & 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \\
 & & 0 \quad 2 \quad 6 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \\
 [\mathbf{A} & \mathbf{b}] = & 1 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \\
 & & 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\
 & & \\
 \mathbf{x} = & & 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru  $\mathbf{c}$ , tj.  $c_j = 0$  pro  $j \in J$   
 (vždy přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci  $j$  jedničku).

$$\begin{array}{rcl}
 [\mathbf{c}^T & d] = & 0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 3 \\
 & & 0 \quad 2 \quad 6 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \\
 [\mathbf{A} & \mathbf{b}] = & 1 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \\
 & & 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\
 & & \\
 \mathbf{x} = & & 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru  $\mathbf{c}$ , tj.  $c_j = 0$  pro  $j \in J$   
 (vždy přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci  $j$  jedničku).

$$\begin{array}{rcl}
 [\mathbf{c}^T & d] = & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 \\
 & & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
 [\mathbf{A} & \mathbf{b}] = & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 & & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
 \\
 \mathbf{x} = & & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 
 \end{array}$$

- ▶ Protože  $x_j = 0$  pro  $j \notin J$ , je  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$  a tedy  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} - d = -d$ .
- ▶ Ihned vidíme, co by udělal vstup sloupce  $j \notin J$  do báze:
  - ▶ když  $c_j > 0$ , účelová hodnota by stoupla
  - ▶ když  $c_j < 0$ , účelová hodnota by klesla
 (za předpokladu, že nové bázové řešení nebude degenerované, tj.  $x_j > 0$ ).
- ▶ Jestliže v některém sloupci  $j$  je  $c_j < 0$  a  $a_{ij} \leq 0$  pro všechna  $i$ , účelovou funkci můžeme libovolně zmenšovat  $\Rightarrow$  úloha je neomezená.



## Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- ▶ podmnožina sloupců  $\mathbf{A}$  tvoří standardní bázi
- ▶  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ▶ ceny  $c_j$  v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Iterace se provede takto:

## Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- ▶ podmnožina sloupců  $\mathbf{A}$  tvoří standardní bázi
- ▶  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ▶ ceny  $c_j$  v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Iterace se provede takto:

- 1 Vyber sloupec  $j$  pivotu tak, aby  $c_j < 0$ .

# Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- ▶ podmnožina sloupců  $\mathbf{A}$  tvoří standardní bázi
- ▶  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ▶ ceny  $c_j$  v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Iterace se provede takto:

- 1 Vyber sloupec  $j$  pivotu tak, aby  $c_j < 0$ .
- 2 Vyber řádek  $i$  pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tedy

$$i \in \operatorname{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}} \quad (\text{plyne z podmínek výše})$$

# Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- ▶ podmnožina sloupců  $\mathbf{A}$  tvoří standardní bázi
- ▶  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ▶ ceny  $c_j$  v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Iterace se provede takto:

- 1 Vyber sloupec  $j$  pivotu tak, aby  $c_j < 0$ .
- 2 Vyber řádek  $i$  pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tedy

$$i \in \operatorname{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}} \quad (\text{plyne z podmínek výše})$$

- 3 Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu  $(i, j)$  a redukov cenu  $c_j$ , tj.

# Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- ▶ podmnožina sloupců  $\mathbf{A}$  tvoří standardní bázi
- ▶  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ▶ ceny  $c_j$  v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{array} \right]$$

Iterace se provede takto:

- 1 Vyber sloupec  $j$  pivotu tak, aby  $c_j < 0$ .
- 2 Vyber řádek  $i$  pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tedy

$$i \in \operatorname{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}} \quad (\text{plyne z podmínek výše})$$

- 3 Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu  $(i, j)$  a redukuj cenu  $c_j$ , tj.
  - ▶ nastav pivot na jedničku

# Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- ▶ podmnožina sloupců  $\mathbf{A}$  tvoří standardní bázi
- ▶  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ▶ ceny  $c_j$  v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{array} \right]$$

Iterace se provede takto:

- 1 Vyber sloupec  $j$  pivotu tak, aby  $c_j < 0$ .
- 2 Vyber řádek  $i$  pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tedy

$$i \in \operatorname{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}} \quad (\text{plyne z podmínek výše})$$

- 3 Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu  $(i, j)$  a redukuj cenu  $c_j$ , tj.
  - ▶ nastav pivot na jedničku
  - ▶ vynuluj prvky nad a pod pivotem (vč. účelového řádku)

# Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- ▶ podmnožina sloupců  $\mathbf{A}$  tvoří standardní bázi
- ▶  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ▶ ceny  $c_j$  v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{array} \right]$$

Iterace se provede takto:

- 1 Vyber sloupec  $j$  pivotu tak, aby  $c_j < 0$ .
- 2 Vyber řádek  $i$  pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tedy

$$i \in \operatorname{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}} \quad (\text{plyne z podmínek výše})$$

- 3 Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu  $(i, j)$  a redukuj cenu  $c_j$ , tj.
  - ▶ nastav pivot na jedničku
  - ▶ vynuluj prvky nad a pod pivotem (vč. účelového řádku)

# Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- ▶ podmnožina sloupců  $\mathbf{A}$  tvoří standardní bázi
- ▶  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ▶ ceny  $c_j$  v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & -3.5 & 2.5 & 0 & 1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{array} \right]$$

Iterace se provede takto:

- 1 Vyber sloupec  $j$  pivotu tak, aby  $c_j < 0$ .
- 2 Vyber řádek  $i$  pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tedy

$$i \in \operatorname{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}} \quad (\text{plyne z podmínek výše})$$

- 3 Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu  $(i, j)$  a redukuj cenu  $c_j$ , tj.
  - ▶ nastav pivot na jedničku
  - ▶ vynuluj prvky nad a pod pivotem (vč. účelového řádku)



Algoritmus končí, když je splněna jedna z podmínek:

- ▶ Všechny ceny  $c_j$  jsou nezáporné. (Jsme v optimu.)

0	0	7	1	0	1	4
0	1	3	0.5	0	2	2
1	0	0	-0.5	0	0	1
0	0	4	0.5	1	4	3

- ▶ V každém sloupci  $j$ , ve kterém  $c_j < 0$ , je  $a_{ij} \leq 0$  pro všechna  $i$ . (Úloha je neomezená.)

0	0	7	-1	0	1	4
0	1	3	-0.5	0	2	2
1	0	0	-0.5	0	0	1
0	0	4	-0.5	1	4	3

Pro zahájení simplexového algoritmu musíme vstupní úlohu převést na tvar

$$\min\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

kde podmnožina sloupců  $\mathbf{A}$  tvoří standardní bázi a  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ .

Někdy je to snadné. Např. když má vstupní úloha tvar

$$\min\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

kde  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ . Přidáním slackových proměnných  $\mathbf{u}$  ji převedeme na úlohu

$$\min\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} + \mathbf{u} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \}$$

se simplexovou tabulkou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

ve které sloupce příslušné proměnným  $\mathbf{u}$  tvoří standardní bázi  $\mathbf{I}$ .

Obecný případ: Vstupní úlohu lze vždy efektivně převést na tvar

$$\min\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

kde  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  (ale  $\mathbf{A}$  nemusí obsahovat standardní bázi).

Vyřeš nejprve pomocnou úlohu

$$\min\{ \mathbf{1}^T \mathbf{u} \mid \mathbf{Ax} + \mathbf{u} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \}$$

se simplexovou tabulkou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Platí  $(\mathbf{1}^T \mathbf{u} = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{u} = \mathbf{0}) \Leftrightarrow (\mathbf{Ax} = \mathbf{b})$ . Proto:

- ▶ Vstupní úloha je **nepřípustná**  $\Leftrightarrow$  pomocná úloha má opt. hodnotu **kladnou**.
- ▶ Vstupní úloha je **přípustná**  $\Leftrightarrow$  pomocná úloha má opt. hodnotu **nulovou**.
  - ▶ Jestliže je opt. řešení  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  pomocné úlohy **nedegenerované**, pak všechny sloupce příslušné proměnným  $\mathbf{u}$  jsou nebázové, proto matice  $\mathbf{A}$  obsahuje standardní bázi.
  - ▶ Jestliže je opt. řešení  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  pomocné úlohy **degenerované**, některé sloupce příslušné proměnným  $\mathbf{u}$  mohou být bázové. Dalším pivotováním je možno bázi z těchto sloupců 'vyhnat'.