Simplexová metoda na řešení lineárního programování

Tomáš Werner

15. prosince 2017

Báze a bázová řešení

Mějme mnohostěn

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$.

Báze a bázová řešení

Mějme mnohostěn

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$.

- $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ je **báze**, pokud $|J| = m$ a sloupce matice $\mathbf{A}$ s indexy J jsou lineárně nezávislé. Tedy sloupce J tvoří regulární matici $m \times m$.
- Vektor $\mathbf{x}$ je **bázové řešení** příslušné bázi J, pokud

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ x_j &= 0 \qquad \forall j \notin J \end{aligned}$$

- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **přípustné**, pokud $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **degenerované**, pokud má méně než m nenulových složek.

Báze a bázová řešení

Mějme mnohostěn

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$.

- $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ je **báze**, pokud $|J| = m$ a sloupce matice $\mathbf{A}$ s indexy J jsou lineárně nezávislé. Tedy sloupce J tvoří regulární matici $m \times m$.
- Vektor $\mathbf{x}$ je **bázové řešení** příslušné bázi J, pokud

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ x_j &= 0 \qquad \forall j \notin J \end{aligned}$$

- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **přípustné**, pokud $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **degenerované**, pokud má méně než m nenulových složek.

Platí (bez důkazu):

- Přípustná bázová řešení jsou právě vrcholy mnohostěnu X.
- Lineární funkce nabývá na mnohostěnu minima aspoň v jednom vrcholu.

Příklad

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{matrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{matrix}$$

Příklad

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \begin{matrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{matrix}$$

- $\{2, 3, 5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)

Příklad

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & & 2 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

- $\{2,3,5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)
- $\{1,4,5\}$ je báze. Bázové řešení $\mathbf{x}$ jednoznačné řešení soustavy

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_3 = x_6 = 0$$

Je přípustné a není degenerované.

Příklad

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr} \color{red}{-1} & \color{red}{1} & 3 & \color{red}{1} & 0 & 2 & 1 \\ \color{red}{1} & \color{red}{0} & 4 & \color{red}{0} & 1 & 4 & 4 \\ \color{red}{-1} & \color{red}{0} & 4 & \color{red}{1} & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{rrrrrr} 4 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}$$

- $\{2, 3, 5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)
- $\{1, 4, 5\}$ je báze. Bázové řešení $\mathbf{x}$ jednoznačné řešení soustavy

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_3 = x_6 = 0$$

  Je přípustné a není degenerované.
- $\{1, 2, 4\}$ je báze. Bázové řešení nepřípustné.

Příklad

$$
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}
$$

$$
\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}
$$

- $\{2,3,5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)
- $\{1,4,5\}$ je báze. Bázové řešení **x** jednoznačné řešení soustavy

$$
\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

$$
x_2 = x_3 = x_6 = 0
$$

  Je přípustné a není degenerované.
- $\{1,2,4\}$ je báze. Bázové řešení nepřípustné.
- $\{3,4,5\}$ je báze. Bázové řešení nepřípustné a degenerované.

Příklad

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & \color{red}{3} & \color{red}{1} & 0 & \color{red}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \color{red}{4} & \color{red}{0} & 1 & \color{red}{4} & 4 \\ -1 & 0 & \color{red}{4} & \color{red}{1} & 1 & \color{red}{4} & 2 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

- $\{2,3,5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)
- $\{1,4,5\}$ je báze. Bázové řešení $\mathbf{x}$ jednoznačné řešení soustavy

  $$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  $$x_2 = x_3 = x_6 = 0$$

  Je přípustné a není degenerované.
- $\{1,2,4\}$ je báze. Bázové řešení nepřípustné.
- $\{3,4,5\}$ je báze. Bázové řešení nepřípustné a degenerované.
- Stejné bázové řešení odpovídá bázi $\{3,4,6\}$.
  Degenerované bázové řešení odpovídá více než jedné bázi!

Standardní báze

Simlexová metoda používá jen **standardní** báze. Výhody:

- Ihned vidíme bázové řešení $\mathbf{x}$: jeho nenulové složky jsou složky $\mathbf{b}$.
- $\mathbf{x}$ je přípustné $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

$$
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc|c}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1
\end{array}
$$

$$
\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc}
3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ vynásobíme nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ přičteme lin. kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- **Pivot** je prvek (i, j), kde i je řádek pro který $a_{ij} = 1$.

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\
1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & & 1 \\
\downarrow & \uparrow & & & & & &
\end{array}$$

Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásobíme nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičteme lin. kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- **Pivot** je prvek (i, j), kde i je řádek pro který $a_{ij} = 1$.

$$\begin{array}{cccccc c}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\downarrow & \uparrow & & & & &
\end{array}$$

Chceme pivot nastavit na 1 a prvky nad i pod pivotem na 0:

Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásobíme nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičteme lin. kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- **Pivot** je prvek (i, j), kde i je řádek pro který $a_{ij} = 1$.

$$
\begin{array}{cccccc c}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\\
\downarrow & \uparrow & & & & &
\end{array}
$$

Chceme pivot nastavit na 1 a prvky nad i pod pivotem na 0:

1. Vydělíme řádek i pivotem a_{ij}.

Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ vynásobíme nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ přičteme lin. kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- **Pivot** je prvek (i, j), kde i je řádek pro který $a_{ij} = 1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
-2 & \color{red}{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\\
\downarrow & \uparrow & & & & &
\end{array}
$$

Chceme pivot nastavit na 1 a prvky nad i pod pivotem na 0:

1. Vydělíme řádek i pivotem a_{ij}.
2. Pro každé $i' \neq i$ odečteme $a_{i'j}$-násobek pivotového řádku i od řádku i'.

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ vynásobíme nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ přičteme lin. kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- **Pivot** je prvek (i, j), kde i je řádek pro který $a_{ij} = 1$.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
-2 & \color{red}{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
1 & \color{red}{0} & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\
\\
\downarrow & \uparrow & & & & &
\end{array}$$

Chceme pivot nastavit na 1 a prvky nad i pod pivotem na 0:

1. Vydělíme řádek i pivotem a_{ij}.
2. Pro každé $i' \neq i$ odečteme $a_{i'j}$-násobek pivotového řádku i od řádku i'.

Kdy bude nové bázové řešení přípustné?

- Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.
- Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu (i, j) zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$ po ekv. úpravě kolem pivotu (i, j)?

- b_i se změní na b_i / a_{ij}.
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j} b_i / a_{ij}$.

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- $a_{ij} > 0$
- Pro každé $i' \neq i$ platí: $(a_{i'j} \leq 0)$ nebo $(b_i / a_{ij} \leq b_{i'} / a_{i'j})$.

Kdy bude nové bázové řešení přípustné?

- Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.
- Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu (i, j) zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$ po ekv. úpravě kolem pivotu (i, j)?

- b_i se změní na b_i / a_{ij}.
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j} b_i / a_{ij}$.

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- $a_{ij} > 0$
- Pro každé $i' \neq i$ platí: $(a_{i'j} \leq 0)$ nebo $(b_i / a_{ij} \leq b_{i'} / a_{i'j})$.

$$\begin{array}{cccccc c} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & {\color{red}-1} & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

- Po úpravě kolem pivotu $(3, 2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $-1 \not\geq 0$.

Kdy bude nové bázové řešení přípustné?

- Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.
- Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu (i,j) zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$ po ekv. úpravě kolem pivotu (i,j)?

- b_i se změní na b_i/a_{ij}.
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j}b_i/a_{ij}$.

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- $a_{ij} > 0$
- Pro každé $i' \neq i$ platí: $\;(a_{i'j} \leq 0)\;$ nebo $\;(b_i/a_{ij} \leq b_{i'}/a_{i'j})$.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1
\end{array}
$$

- Po úpravě kolem pivotu $(3,2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $-1 \not> 0$.
- Po úpravě kolem pivotu $(3,2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $\frac{3}{1} \not\leq \frac{4}{2}$

Kdy bude nové bázové řešení přípustné?

- Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.
- Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu (i, j) zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$ po ekv. úpravě kolem pivotu (i, j)?

- b_i se změní na b_i / a_{ij}.
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j} b_i / a_{ij}$.

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- $a_{ij} > 0$
- Pro každé $i' \neq i$ platí: $\;(a_{i'j} \leq 0)\;$ nebo $\;(b_i / a_{ij} \leq b_{i'} / a_{i'j})$.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & 1
\end{array}
$$

- Po úpravě kolem pivotu $(3, 2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $-1 \not> 0$.
- Po úpravě kolem pivotu $(3, 2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $\frac{3}{1} \not\leq \frac{4}{2}$
- Po úpravě kolem pivotu $(3, 6)$ bude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $2 > 0$, $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \frac{4}{4}$.

Nekladný sloupec

Když jsou všechny prvky v nebázovém sloupci $j \notin J$ nekladné:

- Sloupec j se nemůže stát bázovým (nelze v něm vybrat pivot).
- Existuje směr $\mathbf{v}$ tak, že $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v} \in X$ pro každé $\alpha \geq 0$ (mnohostěn obsahuje polopřímku, tedy je **neomezený**).

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc}
0 & \color{red}{-2} & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\
1 & \color{red}{-1} & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\
0 & \color{red}{-1} & 1 & 0 & 1 & 2 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccccc}
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\
\mathbf{v} = & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0
\end{array}
$$

(Vektor $\mathbf{v}$ je řešením soustavy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\
v_j &= 1 \\
v_{j'} &= 0 \qquad \forall j' \notin J,\ j' \neq j
\end{aligned}
$$

Tedy: bázové složky $\mathbf{v}$ jsou rovny minus prvky sloupce j.)

Lineární program

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

reprezentujeme **simplexovou tabulkou**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Přičtěme k prvnímu (účelovému) řádku tabulky lineární kombinaci ostatních řádků:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}'^T & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} + \mathbf{y}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T + \mathbf{y}^T\mathbf{A} & d + \mathbf{y}^T\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Nová účelová funkce:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'^T\mathbf{x} - d' &= (\mathbf{c}^T + \mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} - (d + \mathbf{y}^T\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d + \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d \qquad \text{když } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Hodnota účelové funkce zůstane pro všechna řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ stejná!
Tedy úloha se nezmění.

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru **c**, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$
(přičti k účelovému řádku vhodný násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = \begin{array}{ccccccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{ccccccc} \color{red}{0} & 2 & 6 & \color{red}{1} & \color{red}{0} & 4 & 4 \\ \color{red}{1} & 1 & 3 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 2 & 3 \\ \color{red}{0} & -1 & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{1} & 2 & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

Redukované ceny

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru **c**, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$
(přičti k účelovému řádku vhodný násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc} 0 & -3 & -6 & -1 & 2 & -1 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$
(přičti k účelovému řádku vhodný násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

Redukované ceny

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$
(přičti k účelovému řádku vhodný násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{rrrrrr} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

Redukované ceny

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku vhodný násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{matrix}$$

- Protože $x_j = 0$ pro $j \notin J$, je $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - d = -d$.
- Ihned vidíme, co by udělal vstup sloupce $j \notin J$ do báze:
  - když $c_j > 0$, účelová hodnota by stoupla
  - když $c_j < 0$, účelová hodnota by klesla

  (za předpokládu, že nové bázové řešení nebude degenerované).
- Jestliže v některém sloupci j je $c_j < 0$ a $a_{ij} \leq 0$ pro všechna i, účelovou funkci můžeme libovolně zmenšovat. Tedy úloha je neomezená.

Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka splňující:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi J
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- $c_j = 0$ pro $j \in J$ (ceny jsou redukované).

Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka splňující:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi J
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- $c_j = 0$ pro $j \in J$ (ceny jsou redukované).

Iterace se provede takto:

1. Vyber index j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber index i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tedy (promyslete!)
$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$
3. Udělej ekv. úpravu okolo pivotu (i, j).
4. Ekv. úpravou účelového řádku vynuluj c_j v novém bázovém sloupci j.

Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka splňující:

- podmnožina sloupců **A** tvoří standardní bázi J
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- $c_j = 0$ pro $j \in J$ (ceny jsou redukované).

Iterace se provede takto:

1. Vyber index j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber index i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tedy (promyslete!)
$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$
3. Udělej ekv. úpravu okolo pivotu (i, j).
4. Ekv. úpravou účelového řádku vynuluj c_j v novém bázovém sloupci j.

Algoritmus končí, když je splněna jedna z podmínek:

- Všechny c_j jsou nezáporné. Jsme v optimu.
- V každém sloupci j, kde $c_j < 0$, je $a_{ij} \leq 0$ pro všechna i. Úloha je neomezená.

Příklad

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
\hline
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1
\end{array}
$$

Příklad

$$
\begin{array}{cccccc|c}
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \color{red}{-3} & 0 \\
\hline
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & \color{red}{4} & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & \color{red}{2} & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & 1
\end{array}
$$

1. Vyber sloupec j pivotu dle znamének c_j.

Příklad

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & 1 \end{array}$$

1. Vyber sloupec j pivotu dle znamének c_j.
2. Vyber řádek i pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.

Příklad

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
\hline
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & 1
\end{array}
$$

1. Vyber sloupec j pivotu dle znamének c_j.
2. Vyber řádek i pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
3. Ekv. úpravami tabulky nastav pivot na 0 a všechny prvky nad i pod pivotem (vč. účelového řádku) na 0:

Příklad

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
\hline
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -.5 & .5 & 0 & .5 & \color{red}{1} & .5
\end{array}$$

1. Vyber sloupec j pivotu dle znamének c_j.
2. Vyber řádek i pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
3. Ekv. úpravami tabulky nastav pivot na 0 a všechny prvky nad i pod pivotem (vč. účelového řádku) na 0:
   - Vyděl pivotový řádek pivotem.

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
\hline
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 2 & 2 & 0 & -1 & {\color{red}0} & 2 \\
0 & -.5 & .5 & 0 & .5 & {\color{red}1} & .5
\end{array}
$$

1. Vyber sloupec j pivotu dle znamének c_j.
2. Vyber řádek i pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
3. Ekv. úpravami tabulky nastav pivot na 0 a všechny prvky nad i pod pivotem (vč. účelového řádku) na 0:
   - Vyděl pivotový řádek pivotem.
   - Ke každému nepivotovému řádku přičti vhodný násobek pivotového řádku.

Příklad

0	−2	1	0	0	−3	0
0	4	4	1	−2	0	2
1	2	2	0	−1	0	2
0	−.5	.5	0	.5	1	.5

1. Vyber sloupec j pivotu dle znamének c_j.
2. Vyber řádek i pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
3. Ekv. úpravami tabulky nastav pivot na 0 a všechny prvky nad i pod pivotem (vč. účelového řádku) na 0:
   - Vyděl pivotový řádek pivotem.
   - Ke každému nepivotovému řádku přičti vhodný násobek pivotového řádku.

Příklad

$$
\begin{array}{cccccc|c}
0 & -3.5 & 2.5 & 0 & 1.5 & \color{red}{0} & 1.5 \\
\hline
0 & 4 & 4 & 1 & -2 & \color{red}{0} & 2 \\
1 & 2 & 2 & 0 & -1 & \color{red}{0} & 2 \\
0 & -.5 & .5 & 0 & .5 & \color{red}{1} & .5
\end{array}
$$

1. Vyber sloupec j pivotu dle znamének c_j.
2. Vyber řádek i pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
3. Ekv. úpravami tabulky nastav pivot na 0 a všechny prvky nad i pod pivotem (vč. účelového řádku) na 0:
   - Vyděl pivotový řádek pivotem.
   - Ke každému nepivotovému řádku přičti vhodný násobek pivotového řádku.