# Simplexová metoda na řešení lineárního programování

Tomáš Werner

15. prosince 2017

# Báze a bázová řešení

Mějme mnohostěn

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$.

# Báze a bázová řešení

Mějme mnohostěn

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$.

- $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ je **báze**, pokud $|J| = m$ a sloupce matice $\mathbf{A}$ s indexy $J$ jsou lineárně nezávislé. Tedy sloupce $J$ tvoří regulární matici $m \times m$.
- Vektor $\mathbf{x}$ je **bázové řešení** příslušné bázi $J$, pokud

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ x_j &= 0 \qquad \forall j \notin J \end{aligned}$$

- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **přípustné**, pokud $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **degenerované**, pokud má méně než $m$ nenulových složek.

## Báze a bázová řešení

Mějme mnohostěn

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$.

- $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ je **báze**, pokud $|J| = m$ a sloupce matice $\mathbf{A}$ s indexy $J$ jsou lineárně nezávislé. Tedy sloupce $J$ tvoří regulární matici $m \times m$.
- Vektor $\mathbf{x}$ je **bázové řešení** příslušné bázi $J$, pokud

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$x_j = 0 \qquad \forall j \notin J$$

- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **přípustné**, pokud $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **degenerované**, pokud má méně než $m$ nenulových složek.

Platí (bez důkazu):

- Přípustná bázová řešení jsou právě vrcholy mnohostěnu $X$.
- Lineární funkce nabývá na mnohostěnu minima aspoň v jednom vrcholu.

# Příklad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{matrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & & 2 \end{matrix}$$

# Příklad

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc|c} -1 & \color{red}{1} & \color{red}{3} & 1 & \color{red}{0} & 2 & 1 \\ 1 & \color{red}{0} & \color{red}{4} & 0 & \color{red}{1} & 4 & 4 \\ -1 & \color{red}{0} & \color{red}{4} & 1 & \color{red}{1} & 4 & 2 \end{array}$$

- $\{2, 3, 5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)

# Příklad

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & & 2 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

- $\{2,3,5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)
- $\{1,4,5\}$ je báze. Bázové řešení $\mathbf{x}$ jednoznačné řešení soustavy

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_3 = x_6 = 0$$

Je přípustné a není degenerované.

# Příklad

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{rrrrrr} 4 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}$$

- $\{2, 3, 5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)
- $\{1, 4, 5\}$ je báze. Bázové řešení $\mathbf{x}$ jednoznačné řešení soustavy

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_3 = x_6 = 0$$

  Je přípustné a není degenerované.
- $\{1, 2, 4\}$ je báze. Bázové řešení nepřípustné.

# Příklad

$$
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc|c}
-1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\
-1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2
\end{array}
$$

$$
\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}
$$

- $\{2,3,5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)
- $\{1,4,5\}$ je báze. Bázové řešení $\mathbf{x}$ jednoznačné řešení soustavy

$$
\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 4\\ 2\end{bmatrix}
$$

$$
x_2 = x_3 = x_6 = 0
$$

  Je přípustné a není degenerované.
- $\{1,2,4\}$ je báze. Bázové řešení nepřípustné.
- $\{3,4,5\}$ je báze. Bázové řešení nepřípustné a degenerované.

# Příklad

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & \color{red}{3} & \color{red}{1} & 0 & \color{red}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \color{red}{4} & \color{red}{0} & 1 & \color{red}{4} & 4 \\ -1 & 0 & \color{red}{4} & \color{red}{1} & 1 & \color{red}{4} & 2 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

- $\{2,3,5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)
- $\{1,4,5\}$ je báze. Bázové řešení **x** jednoznačné řešení soustavy

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_3 = x_6 = 0$$

  Je přípustné a není degenerované.
- $\{1,2,4\}$ je báze. Bázové řešení nepřípustné.
- $\{3,4,5\}$ je báze. Bázové řešení nepřípustné a degenerované.
- Stejné bázové řešení odpovídá bázi $\{3,4,6\}$.
  Degenerované bázové řešení odpovídá více než jedné bázi!

# Standardní báze

Simlexová metoda používá jen **standardní** báze. Výhody:

- Ihned vidíme bázové řešení $\mathbf{x}$: jeho nenulové složky jsou složky $\mathbf{b}$.
- $\mathbf{x}$ je přípustné $\;\Leftrightarrow\;$ $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

$$
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc} \color{red}{0} & 2 & 6 & \color{red}{1} & \color{red}{0} & 4 & & 4 \\ \color{red}{1} & 1 & 3 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 2 & & 3 \\ \color{red}{0} & -1 & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{1} & 2 & & 1 \end{array}
$$

$$
\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

# Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásobíme nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičteme lin. kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- **Pivot** je prvek $(i, j)$, kde $i$ je řádek pro který $a_{ij} = 1$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\downarrow & \uparrow & & & & &
\end{array}$$

# Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ vynásobíme nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ přičteme lin. kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- **Pivot** je prvek $(i, j)$, kde $i$ je řádek pro který $a_{ij} = 1$.

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\
1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & & 1 \\
\downarrow & \uparrow & & & & & &
\end{array}
$$

Chceme pivot nastavit na 1 a prvky nad i pod pivotem na 0:

# Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ vynásobíme nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ přičteme lin. kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- **Pivot** je prvek $(i, j)$, kde $i$ je řádek pro který $a_{ij} = 1$.

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\
1 & {\color{red}1} & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & & 1 \\
\downarrow & \uparrow & & & & & &
\end{array}$$

Chceme pivot nastavit na 1 a prvky nad i pod pivotem na 0:

1. Vydělíme řádek $i$ pivotem $a_{ij}$.

# Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ vynásobíme nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ přičteme lin. kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- **Pivot** je prvek $(i, j)$, kde $i$ je řádek pro který $a_{ij} = 1$.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
-2 & \color{red}{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\downarrow & \uparrow & & & & &
\end{array}$$

Chceme pivot nastavit na 1 a prvky nad i pod pivotem na 0:

1. Vydělíme řádek $i$ pivotem $a_{ij}$.
2. Pro každé $i' \neq i$ odečteme $a_{i'j}$-násobek pivotového řádku $i$ od řádku $i'$.

## Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ vynásobíme nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ přičteme lin. kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- **Pivot** je prvek $(i, j)$, kde $i$ je řádek pro který $a_{ij} = 1$.

$$\begin{array}{rrrrrrr} -2 & \color{red}{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & \color{red}{0} & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ \downarrow & \uparrow & & & & & \end{array}$$

Chceme pivot nastavit na 1 a prvky nad i pod pivotem na 0:

1. Vydělíme řádek $i$ pivotem $a_{ij}$.
2. Pro každé $i' \neq i$ odečteme $a_{i'j}$-násobek pivotového řádku $i$ od řádku $i'$.

# Kdy bude nové bázové řešení přípustné?

- Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.
- Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu $(i, j)$ zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$ po ekv. úpravě kolem pivotu $(i, j)$?

- $b_i$ se změní na $b_i / a_{ij}$.
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j} b_i / a_{ij}$.

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- $a_{ij} > 0$
- Pro každé $i' \neq i$ platí: $\;(a_{i'j} \leq 0)\;$ nebo $\;(b_i / a_{ij} \leq b_{i'} / a_{i'j})$.

# Kdy bude nové bázové řešení přípustné?

- Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.
- Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu $(i, j)$ zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$ po ekv. úpravě kolem pivotu $(i, j)$?

- $b_i$ se změní na $b_i / a_{ij}$.
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j} b_i / a_{ij}$.

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- $a_{ij} > 0$
- Pro každé $i' \neq i$ platí: $\;(a_{i'j} \leq 0)\;$ nebo $\;(b_i / a_{ij} \leq b_{i'} / a_{i'j})$.

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\
1 & & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\
0 & & \color{red}{-1} & 1 & 0 & 1 & 2 & & 1
\end{array}
$$

- Po úpravě kolem pivotu $(3, 2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $-1 \not\geq 0$.

## Kdy bude nové bázové řešení přípustné?

- Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.
- Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu $(i, j)$ zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$ po ekv. úpravě kolem pivotu $(i, j)$?

- $b_i$ se změní na $b_i / a_{ij}$.
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j} b_i / a_{ij}$.

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- $a_{ij} > 0$
- Pro každé $i' \neq i$ platí: $(a_{i'j} \leq 0)$ nebo $(b_i / a_{ij} \leq b_{i'} / a_{i'j})$.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

- Po úpravě kolem pivotu $(3, 2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $-1 \not> 0$.
- Po úpravě kolem pivotu $(3, 2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $\frac{3}{1} \not\leq \frac{4}{2}$

# Kdy bude nové bázové řešení přípustné?

- Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.
- Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu $(i, j)$ zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$ po ekv. úpravě kolem pivotu $(i, j)$?

- $b_i$ se změní na $b_i / a_{ij}$.
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j} b_i / a_{ij}$.

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když (rozmyslete!)

- $a_{ij} > 0$
- Pro každé $i' \neq i$ platí: $\;(a_{i'j} \leq 0)\;$ nebo $\;(b_i / a_{ij} \leq b_{i'} / a_{i'j})$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\
1 & & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\
0 & & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & & 1
\end{array}$$

- Po úpravě kolem pivotu $(3, 2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $-1 \not> 0$.
- Po úpravě kolem pivotu $(3, 2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $\frac{3}{1} \not\leq \frac{4}{2}$
- Po úpravě kolem pivotu $(3, 6)$ bude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $2 > 0$, $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \frac{4}{4}$.

# Nekladný sloupec

Když jsou všechny prvky v nebázovém sloupci $j \notin J$ nekladné:

- Sloupec $j$ se nemůže stát bázovým (nelze v něm vybrat pivot).
- Existuje směr $\mathbf{v}$ tak, že $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v} \in X$ pro každé $\alpha \geq 0$ (mnohostěn obsahuje polopřímku, tedy je **neomezený**).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc|c} 0 & \color{red}{-2} & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & \color{red}{-1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \color{red}{-1} & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ \mathbf{v} = & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

(Vektor $\mathbf{v}$ je řešením soustavy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ v_j &= 1 \\ v_{j'} &= 0 \qquad \forall j' \notin J,\ j' \neq j \end{aligned}$$

Tedy: bázové složky $\mathbf{v}$ jsou rovny minus prvky sloupce $j$.)

# Ekvivalentní úpravy účelového řádku

Lineární program

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

reprezentujeme **simplexovou tabulkou**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Přičtěme k prvnímu (účelovému) řádku tabulky lineární kombinaci ostatních řádků:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}'^T & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} + \mathbf{y}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T + \mathbf{y}^T\mathbf{A} & d + \mathbf{y}^T\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Nová účelová funkce:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'^T\mathbf{x} - d' &= (\mathbf{c}^T + \mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} - (d + \mathbf{y}^T\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d + \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d \qquad \text{když } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Hodnota účelové funkce zůstane pro všechna řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ stejná!
Tedy úloha se nezmění.

# Redukované ceny

Úpravou výše vynulujme bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$:

- Pro každé $j \in J$ k účelovému řádku přičteme násobek řádku, který má ve sloupci $j$ jedničku.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr} \color{red}{0} & 2 & 6 & \color{red}{1} & \color{red}{0} & 4 & 4 \\ \color{red}{1} & 1 & 3 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 2 & 3 \\ \color{red}{0} & -1 & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{1} & 2 & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{rrrrrr} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

# Redukované ceny

Úpravou výše vynulujme bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$:

- Pro každé $j \in J$ k účelovému řádku přičteme násobek řádku, který má ve sloupci $j$ jedničku.

$$
\begin{array}{rcrrrrrrr}
\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} & = & \color{red}{0} & -3 & -6 & -1 & 2 & -1 & 1 \\
 & & \color{red}{0} & 2 & 6 & \color{red}{1} & \color{red}{0} & 4 & 4 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} & = & \color{red}{1} & 1 & 3 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 2 & 3 \\
 & & \color{red}{0} & -1 & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{1} & 2 & 1 \\
\mathbf{x} & = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

## Redukované ceny

Úpravou výše vynulujme bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$:

- Pro každé $j \in J$ k účelovému řádku přičteme násobek řádku, který má ve sloupci $j$ jedničku.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 3 & & 5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

Úpravou výše vynulujme bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$:

- Pro každé $j \in J$ k účelovému řádku přičteme násobek řádku, který má ve sloupci $j$ jedničku.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 \\
 & & & & & & & \\
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & & \\
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

# Redukované ceny

Úpravou výše vynulujme bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$:

- Pro každé $j \in J$ k účelovému řádku přičteme násobek řádku, který má ve sloupci $j$ jedničku.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

- Protože $x_j = 0$ pro $j \notin J$, je $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - d = -d$.
- Ihned vidíme, co by udělal vstup sloupce $j \notin J$ do báze:
  - když $c_j > 0$, účelová hodnota by stoupla
  - když $c_j < 0$, účelová hodnota by klesla

  (za předpokládu, že nové bázové řešení nebude degenerované).
- Jestliže v některém sloupci $j$ je $c_j < 0$ a $a_{ij} \leq 0$ pro všechna $i$, účelovou funkci můžeme libovolně zmenšovat. Tedy úloha je neomezená.

# Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka splňující:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi $J$
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- $c_j = 0$ pro $j \in J$ (ceny jsou redukované).

# Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka splňující:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi $J$
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- $c_j = 0$ pro $j \in J$ (ceny jsou redukované).

Iterace se provede takto:

1. Vyber index $j$ pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber index $i$ pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tedy (promyslete!)
$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$
3. Udělej ekv. úpravu okolo pivotu $(i, j)$.
4. Ekv. úpravou účelového řádku vynuluj $c_j$ v novém bázovém sloupci $j$.

# Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka splňující:

- podmnožina sloupců **A** tvoří standardní bázi $J$
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- $c_j = 0$ pro $j \in J$ (ceny jsou redukované).

Iterace se provede takto:

1. Vyber index $j$ pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber index $i$ pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tedy (promyslete!)
$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$
3. Udělej ekv. úpravu okolo pivotu $(i, j)$.
4. Ekv. úpravou účelového řádku vynuluj $c_j$ v novém bázovém sloupci $j$.

Algoritmus končí, když je splněna jedna z podmínek:

- Všechny $c_j$ jsou nezáporné. Jsme v optimu.
- V každém sloupci $j$, kde $c_j < 0$, je $a_{ij} \leq 0$ pro všechna $i$. Úloha je neomezená.

# Příklad

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
\hline
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1
\end{array}$$

# Příklad

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \color{red}{-3} & 0 \\
\hline
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & \color{red}{4} & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & \color{red}{2} & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & 1
\end{array}
$$

1. Vyber sloupec $j$ pivotu dle znamének $c_j$.

# Příklad

$$
\begin{array}{cccccc|c}
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
\hline
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & 1
\end{array}
$$

1. Vyber sloupec $j$ pivotu dle znamének $c_j$.
2. Vyber řádek $i$ pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.

# Příklad

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & 1 \end{array}$$

1. Vyber sloupec $j$ pivotu dle znamének $c_j$.
2. Vyber řádek $i$ pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
3. Ekv. úpravami tabulky nastav pivot na 0 a všechny prvky nad i pod pivotem (vč. účelového řádku) na 0:

# Příklad

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
\hline
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -.5 & .5 & 0 & .5 & \color{red}{1} & .5
\end{array}
$$

1. Vyber sloupec $j$ pivotu dle znamének $c_j$.
2. Vyber řádek $i$ pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
3. Ekv. úpravami tabulky nastav pivot na 0 a všechny prvky nad i pod pivotem (vč. účelového řádku) na 0:
   - Vyděl pivotový řádek pivotem.

# Příklad

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-2$ | 1 | 0 | 0 | $-3$ | 0 |
| 0 | 2 | 6 | 1 | 0 | 4 | 4 |
| 1 | 2 | 2 | 0 | $-1$ | 0 | 2 |
| 0 | $-.5$ | .5 | 0 | .5 | 1 | .5 |

1. Vyber sloupec $j$ pivotu dle znamének $c_j$.
2. Vyber řádek $i$ pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
3. Ekv. úpravami tabulky nastav pivot na 0 a všechny prvky nad i pod pivotem (vč. účelového řádku) na 0:
   - Vyděl pivotový řádek pivotem.
   - Ke každému nepivotovému řádku přičti vhodný násobek pivotového řádku.

# Příklad

$$
\begin{array}{cccccc|c}
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
\hline
0 & 4 & 4 & 1 & -2 & \color{red}{0} & 2 \\
1 & 2 & 2 & 0 & -1 & \color{red}{0} & 2 \\
0 & -.5 & .5 & 0 & .5 & \color{red}{1} & .5
\end{array}
$$

1. Vyber sloupec $j$ pivotu dle znamének $c_j$.
2. Vyber řádek $i$ pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
3. Ekv. úpravami tabulky nastav pivot na 0 a všechny prvky nad i pod pivotem (vč. účelového řádku) na 0:
   - Vyděl pivotový řádek pivotem.
   - Ke každému nepivotovému řádku přičti vhodný násobek pivotového řádku.

# Příklad

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −3.5 | 2.5 | 0 | 1.5 | 0 | 1.5 |
| 0 | 4 | 4 | 1 | −2 | 0 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 0 | −1 | 0 | 2 |
| 0 | −.5 | .5 | 0 | .5 | 1 | .5 |

1. Vyber sloupec $j$ pivotu dle znamének $c_j$.
2. Vyber řádek $i$ pivotu nalezením argumentu minima z čísel $\frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
3. Ekv. úpravami tabulky nastav pivot na 0 a všechny prvky nad i pod pivotem (vč. účelového řádku) na 0:
   - Vyděl pivotový řádek pivotem.
   - Ke každému nepivotovému řádku přičti vhodný násobek pivotového řádku.