

Co a k čemu je optimalizace

Tomáš Werner

Co je optimalizace?

Co na to slovník:

- ▶ **Merriam-Webster dictionary:** an act, process, or methodology of making something (such as a design, system, or decision) as fully perfect, functional, or effective as possible; specifically, the mathematical procedures (such as finding the maximum of a function) involved in this.
- ▶ **Cambridge English Dictionary:** the act of making something as good as possible.
- ▶ **Oxford English Dictionary:** the action of making the best or most effective use of a situation or resource.
- ▶ **Business Dictionary:** finding an alternative with the most cost effective or highest achievable performance under the given constraints, by maximizing desired factors and minimizing undesired ones.

Mnoho aplikací

- ▶ **ekonomie a finance**: minimální riziko, maximální zisk, nastavení cen, ...
- ▶ **logistika**: doprava, průmysl, zásobování, válka
- ▶ **řízení (control engineering)**: např. výtahu, robota, vlaku, aktivní budovy, ...
- ▶ **rozvrhování a plánování (scheduling)**: rozvrh ve škole, výrobní kroky, cesta mobilního robota, sled úkonů robotického manipulátoru, aircrew scheduling
- ▶ **floor planning**: návrh integrovaných obvodů (VLSI design) a plošných spojů
- ▶ **optimalizace kódu**: co nejmenší paměť, co nejrychlejší kód
- ▶ **routing**: spec. případ je problém obchodního cestujícího, IDOS
- ▶ **pravděpodobnost a statistika**: princip maximální věrohodnosti, princip maxima entropie, regrese (modelování funkční závislosti náhodných proměnných), rozhodování za neurčitosti
- ▶ **počítačové vidění**: rekonstrukce scény z obrazů (multiview geometry), segmentace obrazu pomocí řezů v grafu (graph cuts), hledání tváří v obraze (AdaBoost), ...
- ▶ **inteligentní zpracování jiných signálů** (např. audio, EKG, EEG): separace zdrojů, auditory scene analysis, ...
- ▶ **rozpoznávání a strojové učení**: minimální trénovací chyba, nejjednodušší model

- ▶ **návrh mechanických struktur:** most, jeřáb, hák, křídlo letadla
- ▶ **molekulární modelování:** např. protein folding
- ▶ **teorie her**
- ▶ návrh počítačové sítě, cesty v síti (distrib. algoritmy)
- ▶ přiřazování radiových frekvencí v mobilní síti
- ▶ ...

Neustálená terminologie

- ▶ Nutnost optimalizovat vyvstává v mnoha oborech \implies mnoho terminologie
- ▶ Různé výrazy někdy znamenají totéž nebo téměř totéž.
- ▶ Záleží na oboru, mění se někdy též s dobou.
- ▶ Výrazy ne vždy přesně definované, někdy misnomers.

Příklady: mathematical programming, mathematical optimization, linear programming, linear optimization, slack variables, reduced costs, shadow prices, optimum, extreme, feasible solution, objective (cost, energy, criterial, utility, fitness) function, relative/absolute minimum, local/global minimum, Pareto optimal / Pareto efficient / non-dominated solution

Příroda optimalizuje:

- ▶ Fyzikálních zákony někdy ve variačním tvaru:
 - ▶ systém v rovnováze je v lokálním minimum potenciální energie (minimální povrchy, mechanické struktury, terciární struktura bílkovin, ...)
 - ▶ princip nejkratšího času v optice (Fermat)
 - ▶ princip nejmenšího účinku v mechanice: systém se pohybuje ve stavovém prostoru mezi dvěma časy tak, že celkový účinek má minimální (přesněji: lokálně extrémní) hodnotu
- ▶ Occamova břitva: příroda si vybírá nejjednodušší model (ale to už je filosofie)
- ▶ zvíře (či společenství jedinců) si vybírá nejkratší cestu, minimalizuje námahu na dosažení cíle, ...

“Klasická” doba:

- ▶ infinitezimální počet, mat. analýza (Newton, Leibniz)
- ▶ variační počet (Newton, Leibniz, Euler)
- ▶ podmínky na volné lokální extrémů (Fermat)
- ▶ podmínky na lokální extrémů vázané rovnostmi (Lagrange)

Moderní optimalizace (po 2. světové válce, s nástupem počítačů):

- ▶ lineární programování:
 - ▶ teorie, formulace (Kantorovič, Koopmans)
 - ▶ simplexová metoda (Dantzig)
 - ▶ dualita, teorie her (von Neumann)
- ▶ KKT podmínky na lok. extrémů vázané nerovnostmi (Karush-Kuhn-Tucker)
- ▶ moderní kombinatorická optimalizace:
 - ▶ řezy a toky v grafu (Ford, Fulkerson)
 - ▶ celočíselné lin. programování (Gomory, Chvátal), polyhedrální metody
- ▶ polynomiální algoritmus na LP (Chadžian), algoritmy vnitřního bodu (Karmarkar)
- ▶ semidefinitní programování (SDP)

Matematická optimalizace (programování)

Obecná formulace optimalizační úlohy: najdi minimum funkce

$$f: X \rightarrow Y$$

kde

- ▶ X je množina **přípustných řešení**,
- ▶ f je **účelová (cenová, objektivní, kriteriální) funkce**,
- ▶ Y je (částečně či úplně) uspořádaná množina hodnot.

Tedy vlastně najdi minimální či nejmenší prvek množiny

$$f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subseteq Y.$$

(Zopakujte z prváku: minimální a nejmenší prvek částečně uspořádané množiny.)

Typy optimalizačních úloh

- ▶ dle množiny Y :
 - ▶ Y úplně uspořádaná (typicky $Y = \mathbb{R}$): ve škole typický případ, v praxi skoro nikdy
 - ▶ Y jen částečně uspořádaná (např. $Y = \mathbb{R}^k$): **multi-kriteriální optimalizace, vektorová optimalizace** (cf. Pareto-optimální řešení)
 - ▶ f je konstantní (tj. chybí): **feasibility problem**, najdi nějaké přípustné řešení (např. Sudoku)
- ▶ dle množiny X :
 - ▶ **spojitá optimalizace** ($X \subseteq \mathbb{R}^n$ nespočetná, “spojité proměnné”)
 - ▶ **kombinatorická optimalizace**: X konečná nebo spočetná ($X \subseteq \mathbb{Z}^n$ nebo X obsahuje textové řetězce, grafy, konfigur. Rubikovy kostky, ...).
Příklad: problém obchodního cestujícího.
 - ▶ **variační počet**: X je např. množina reálných funkcí na intervalu.
Příklady: brachistochrona, řetězovka, optimální trajektorie ruky robota
- ▶ xxx programming (LP, QP, QCQP, SOCP, GP, SDP, convex, ILP, MILP)
 - ▶ úlohu nutno formulovat ve “standardním” (“kanonickém”) tvaru.
 - ▶ Mnoho solverů online: CPLEX, MOSEK, SEDUMI, CVX, GUROBI, ...
(viz např. neos-guide.org)
- ▶ dle počtu proměnných a omezení (**small-scale vs. large-scale optimization**):
“big data” dnes aktuální (machine learning, AI, internet)

Role teorie v optimalizaci

Části optimalizace

- ▶ teorie
- ▶ algoritmy
- ▶ aplikace

Při řešení inženýrské úlohy je nutno je rozlišovat!

Role teorie v optimalizaci:

- ▶ existence řešení
- ▶ počet řešení
- ▶ nutné/postačující podmínky na řešení
- ▶ obtížnost nalezení řešení (třídy složitosti P, NP, ...)
- ▶ citlivost řešení na malou změnu parametrů úlohy (perturbation analysis)

Užitečné obory: analýza, lineární algebra, teorie složitosti, kombinatorika (+ teorie grafů), konvexní geometrie, konvexní analýza

Některé typy optimalizačních algoritmů

- ▶ iterační (např. gradientní metoda, Newtonova metoda) – neiterační
- ▶ deterministické – stochastické
- ▶ přesné – přibližné
- ▶ lokální – globální (globální optimalizace: teorie a algoritmy pro hledání globálních optim složitých nekonvexních opt. úloh)
- ▶ centralizované – distribuované (např. výpočty v počítačových sítích, rozvodných elektrických sítích, na mnoha jádrech procesoru, ...)
- ▶ sekvenční – paralelní (překryv s centralizované – distribuované)
- ▶ heuristické:
 - ▶ lokální hledání (hill climbing)
 - ▶ hladové (greedy) algoritmy
 - ▶ tabu search
 - ▶ motivované přírodou: genetické/evoluční, simulované žíhání, kolonie mravenců