

# Cvičení z optimalizace

## Metoda nejmenších čtverců 2

Vojtěch Franc, 2014

### 1 Identifikace parametrů autoregresního modelu

Mějme zadanou posloupnost reálných čísel  $y_0, y_1, \dots, y_T$ . Posloupnost může například popisovat signál digitalizovaný v diskretních časových okamžicích  $t = 0, 1, \dots, T$ . Naším cílem bude odhadnout parametry autoregresního modelu této posloupnosti, který předpokládá, že

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t \geq p, \quad (1)$$

tj.  $t$ -tý prvek posloupnosti je lineární kombinací  $p$  předcházejících prvků a náhodné odchylky (šumu)  $\varepsilon_t$ . Číslo  $p \in \mathcal{N}^+$  se nazývá řádem modelu. Autoregresní model  $p$ -tého řádu je určen vektorem parametrů  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ . Odhadování těchto parametrů z dat, tj. ze zadané posloupnosti  $y_0, y_1, \dots, y_T$ , se v teorii řízení nazývá *identifikace systému*. Jedna z metod identifikace je založena na hledání takových parametrů, které zajistí, že model co nejlépe odpovídá zadaným datům ve smyslu minimalizace součtu kvadrátů odchylek  $\varepsilon_t$  pro  $t = p, \dots, T$ . To znamená, že hledáme vektor parametrů

$$\hat{\mathbf{a}} = \underset{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{p+1}}{\operatorname{argmin}} F(\mathbf{a}), \quad (2)$$

kde

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{t=p}^T \varepsilon_t^2 = \sum_{t=p}^T \left( \left( a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} \right) - y_t \right)^2.$$

Řešení problému (2) lze převést na řešení přeürčené soustavy lineárních rovnic  $\mathbf{M}\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$  metodou nejmenších čtverců.

Takto získaný model se dá použít například pro kompresi posloupnosti  $y_0, y_1, \dots, y_T$ . V tomto případě postačí uchovat podsekvenci  $y_0, \dots, y_{p-1}$  a odhadnuté parametry  $\hat{\mathbf{a}}$ . Zbývající členy posloupnosti  $y_p, \dots, y_T$  vygenerujeme rekurzivním použitím (1). Koeficient komprese je tedy  $T/(2p+1)$ . Na podobné myšlenky je postavena komprese řečového signálu v reálném čase, která se používá například v mobilních telefonech.

#### Úkoly k vypracování

1. Stáhněte si WAV soubor se zvukem gongu <http://cmp.felk.cvut.cz/cmp/courses/OPT/cviceni/07/gong.wav> a nahrajte si ho do Matlabu pomocí příkazu

```
[y, Fs]=wavread('gong.wav');
```

$y$  je vektor obsahující hodnoty zvukové sekvence vzorkované s frekvencí  $F_s$ . Pokud máte počítač se zvukovou kartou, můžete si signál přehrát pomocí příkazu `sound(y, Fs)`.

2. Formulujte úlohu (2) jako problém řešení soustavy lineárních rovnic  $\mathbf{M}\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$  metodou nejmenších čtverců, tj. jako úlohu  $\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{M}\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$ . Napište explicitní tvar matice  $\mathbf{M}$  a vektoru  $\mathbf{b}$ . Pro nahranou zvukovou sekvenci odhadněte parametry autoregresního modelu s řádem  $p = 300$  s využitím operátoru Matlabu  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{b}$ .

Výstup: i. předpis pro  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{b}$ , ii. hodnota  $\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{M}\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$ .

3. Implementujte algoritmus řešící problém nejmenších čtverců pomocí QR rozkladu. Vstupem algoritmu necht' je dvojice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $m > n$  a výstupem vektor  $\hat{\mathbf{x}}$ , který je řešením  $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ . Předpokládejte, že matice  $\mathbf{A}$  má plnou hodnotu. Uvnitř algoritmu použijte funkci Matlabu  $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}] = \text{qr}(\mathbf{A}, 0)$  pro získání matice  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ . Váš algoritmus může použít kromě funkce `qr` jen základní operace, tj. nesmí například používat operaci "zpětného lomítka" nebo inverzi. Použijte Vaši implementaci k řešení problému z úkolu 2 a porovnejte Váš výsledek s výsledkem získaným pomocí  $\mathbf{A} \setminus \mathbf{b}$ .

Výstup: i. funkce v Matlabu `x=solve_ls(A,b)`, ii. vzdálenost vektorů parametrů  $\|\hat{\mathbf{a}}_1 - \hat{\mathbf{a}}_2\|$ , kde  $\hat{\mathbf{a}}_1$  je řešení získané Vaší funkcí a  $\hat{\mathbf{a}}_2$  řešení pomocí  $\mathbf{A} \setminus \mathbf{b}$ .

4. Použijte odhadnutý model k vygenerování syntetického zvuku gongu. Porovnejte synteticky vygenerovaný a originální zvuk gongu graficky, tj. zobrazte oba průběhy do jednoho grafu pomocí funkce `plot`. Pokud to Váš počítač umožňuje, přehrajte si oba zvukové signály pomocí příkazu `sound(y, Fs)`.

Výstup: i. graf.