Derivace a Taylorův polynom

Tomáš Werner, 2011

Je dána množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a zobrazení $\mathbf{f}\colon X \to \mathbb{R}^m$. Cílem je spočítat pro toto zobrazení Taylorův polynom v daném bodě $\mathbf{x}^*$ a poté vizualizovat zobrazení $\mathbf{f}$ a Taylorův polynom. Způsob vizualizace se liší podle dimenzí definičního oboru a oboru hodnot, ale je vždy stejný pro zobrazení $\mathbf{f}$ a pro Taylorův polynom.

Zopakujme (viz skripta):

- Pro zobrazení $\mathbf{f}\colon X \to \mathbb{R}^m$ je Taylorův polynom prvního řádu v bodě $\mathbf{x}^*$ zobrazení $\mathbf{T}_1\colon X \to \mathbb{R}^m$ dané předpisem

  $$\mathbf{T}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*),$$

  kde $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)$ je totální derivace (Jacobiho matice) zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}^*$.
- Pro funkci $f\colon X \to \mathbb{R}$ je Taylorův polynom druhého řádu v bodě $\mathbf{x}^*$ funkce $T_2\colon X \to \mathbb{R}$ daná předpisem

  $$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + f'(\mathbf{x}^*)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T f''(\mathbf{x}^*)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \tag{1}$$

  kde $f'(\mathbf{x}^*)$ je totální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}^*$ (tj. řádkový vektor délky n) a $f''(\mathbf{x}^*)$ je Hessova matice funkce f v bodě $\mathbf{x}^*$ (tj. symetrická matice $n \times n$ druhých parciálních derivací).

  Taylorův polynom pro zobrazení $\mathbf{f}\colon X \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení $\mathbf{T}_2\colon X \to \mathbb{R}^m$, jehož složky jsou funkce (1) pro každou složku zobrazení $\mathbf{f}$.

Podotkněme, že $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$ přísně vzato nejsou polynomy, protože jsou to zobrazení a ne funkce. Tuto nepřesnost v názvosloví je nutno tolerovat.

Úlohu vypracujeme pro následující zobrazení:

1. $n = 1$, $m = 1$, $X = \langle -3, 2\rangle$, $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - x$
2. $n = 1$, $m = 2$, $X = \langle 0, 2\pi\rangle$, $\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix}\cos x\\ \sin x\end{bmatrix}$
3. $n = 2$, $m = 1$, $X = \langle -2, 2\rangle \times \langle -2, 2\rangle$, $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = 2\mathrm{e}^{-\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ (e značí Eulerovo číslo)
4. $n = 2$, $m = 3$, $X = \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix}(R + r\cos x_2)\cos x_1\\ (R + r\cos x_2)\sin x_1\\ r\sin x_2\end{bmatrix}$
5. $n = 2$, $m = 2$, $X = \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2) = \mathbf{x}\log(1 + \mathbf{x}^T\mathbf{x})$ (log značí přirozený logaritmus)
6. $n = 1$, $m = 3$, X je jako v bodu 2, zobrazení je složením zobrazení z bodu 2 a zobrazení z bodu 4.

Postup vypracování

Stáhněte si matlabské funkce `prikladn.m`. Číslo `n` odpovídá pořadí ve výše uvedeném seznamu. Každá funkce vizualizuje zobrazení $\mathbf{f}$ žlutou barvou, definuje bod $\mathbf{x}^*$ (označený jako `xx`) a nakreslí ho jako červené kolečko. Vaším úkolem je doplnit funkce `T1` a `T2`, což jsou Taylorovy polynomy prvního a druhého řádu pro zobrazení $\mathbf{f}$. Odkomentováním příslušných řádků se pak polynom prvního řádu zobrazí zeleně a polynom druhého řádu fialově.

Jako vzor jsme úlohu vypracovali pro zobrazení 1.

Pro zobrazení 6 (tj. složení zobrazení 2 a 4) vypracujte pouze polynom prvního řádu. Pro výpočet první totální derivace použijte řetězové pravidlo.

Kontrolou správnosti polynomů je to, že polynomy mají v bodě $\mathbf{x}^*$ se zobrazením $\mathbf{f}$ společnou hodnotu a první a druhou derivaci. Tedy polynom prvního řádu je vždy 'tečný' k zobrazení a polynom druhého řádu je kvadratickou aproximací zobrazení.

Požadovaný výstup cvičení:

- Fungující doplněné funkce `prikladn.m`. Cvičící si odevzdané funkce pustí a z obrázku ihned uvidí, zda je vše v pořádku.
- Písemná zpráva, ve které budou vzorce pro Taylorovy polynomy každého zobrazení (nic jiného tam být nemusí).