Cvičení z optimalizace
Markowitzův model

Vojtěch Franc, 2009

Úvod

V tomto cvičení se budeme zabývat aplikací kvadratického programování v ekonomii a sice v úloze, jejímž cílem bude nalézt optimální portfolio akcii. Představme si, že máte určitou sumu peněz, kterou chcete zhodnotit investováním do akcii. V tomto případě stojíme před volbou jakou část z naší celkové sumy pěnez vložit do nákupu konkrétní akcie. Typicky se snažíme investovat tak, abychom při co možná nejmenším riziku dosáhli požadovaného výnosu. S použitím Markowitzova modelu lze tuto úlohu vyjádřit jako problém kvadratického programování.

Markowitzův model

Definice úlohy

Zaveďme si následující značení:

n	počet akcii z nichž skládáme portfolio,
x_i	váha i-té akcie v portfoliu, $i \in \{1, \dots, n\}$,
ρ_i	náhodný výnos i-té akcie ve zvoleném období, $i \in \{1, \dots, n\}$,
r_i	očekávaný výnos i-té akcie ve zvoleném období, $i \in \{1, \dots, n\}$,
r_p	minimální požadovaný výnos .

Vektor vah označíme $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ a vektor náhodných výnosů $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_n)^T$. Vektor $\boldsymbol{x}$ udává poměrnou sumu peněz investovaných do jednotlivých akcii. Jelikož budoucí výnosy z akcii nelze přesně určit, modelují se zde pomocí vektoru náhodných veličin $\boldsymbol{\rho}$. Rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{\rho}$ je charakterizováno prvním a druhým momentem, tj. vektorem středních hodnot $E(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ a kovarianční maticí $E((\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r})^T) = \mathbf{V}$.

Při optimalizaci portfolia nás zajímají dvě kriteria: výnos a riziko. **Výnos portfolia** s vahami $\boldsymbol{x}$ je definován jako střední hodnota celkového výnosu

$$r(\boldsymbol{x}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \rho_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x} \,.$$

Riziko portfolia $\boldsymbol{x}$ je definováno jako směrodatná odchylka celkováho výnosu $\sigma(\boldsymbol{x})$, pro kterou platí

$$\sigma^2(\boldsymbol{x}) = E\big((\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{r})^2\big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{i,j} = \boldsymbol{x}^T \mathbf{V} \boldsymbol{x} \,.$$

Typickou úlohou postavenou na Markowitzově modelu, je hledání takového portfolia $\boldsymbol{x}^*$, tj. rozložní finančních prostředků do nákupu akcii, které zaručí, že výnos $r(\boldsymbol{x}^*)$ není menší než zadaná mez r_p a současně riziko $\sigma(\boldsymbol{x}^*)$ je minimální. Takto definovanou úlohu lze vyjádřit jako problém kvadratického programování:

$$\boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \boldsymbol{x}^T \mathbf{V} \boldsymbol{x} \tag{1a}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\,, \tag{1b}$$

$$x_i \geq 0\,, \quad i = 1,\ldots,n\,, \tag{1c}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i \geq r_p\,. \tag{1d}$$

Matlabu lze problém kvadratického programování řešit pomocí funkce `quadprog`.

Odhad parametrů modelu

Markowitzův model předpokládá, že jak vektor středních hodnot $\boldsymbol{r}$, tak kovarianční matice $\mathbf{V}$ jsou známé. V praxi se tyto parametry odhadují z časových řad vývoje akcí. Nechť $\{v_{i,t} \mid i = 1,\ldots,n\ , t = 1,\ldots,T\}$ jsou ceny akcí $i = 1,\ldots,n$ v časech $t = 1,\ldots,T$. Z cen akcii můžeme spočítat jejich výnosy

$$r_{i,t} = \frac{v_{i,t} - v_{i,t-1}}{v_{i,t-1}}\,, \qquad i = 1,\ldots,n,\ t = 2,\ldots,T\,. \tag{2}$$

Ze vzorku výnosů $\{r_{i,t} \mid i = 1,\ldots,n\ , t = 1,\ldots,T\}$ pak mužeme odhadnout parametry $(\boldsymbol{r},\mathbf{V})$ náhodného rozdelění veličin $\boldsymbol{\rho}$ pomocí výběrového průměru a kovarianční matice

$$r_i = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T} r_{i,t}\,, \qquad i = 1,\ldots,n\,, \tag{3}$$

$$V_{i,j} = \frac{1}{T-2}\sum_{t=2}^{T} (r_{i,t} - r_i)(r_{j,t} - r_j)\,, \qquad i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n\,. \tag{4}$$

Data V našem případě budeme plánovat investici do 10 společností, které se obchodují na americké burze [1]. Konkrétně budeme uvažovat tyto společnosti: 1. Activision, 2. Amazon, 3. Apple, 4. Cisco, 5. Dell, 6. Human Genome, 7. Intel, 8. Microsoft, 9. Oracle a 10. Yahoo.

Budeme se zajímat o měsíční výnosy z akcii. Pro odhad parametrů modelu použijeme ceny akcii v období od ledna 1998 do července 2007 odečítané vždy zečátkem měsíce. Všechny ceny jsou uvedené v USD a jsou v nich již započítané dividendy.

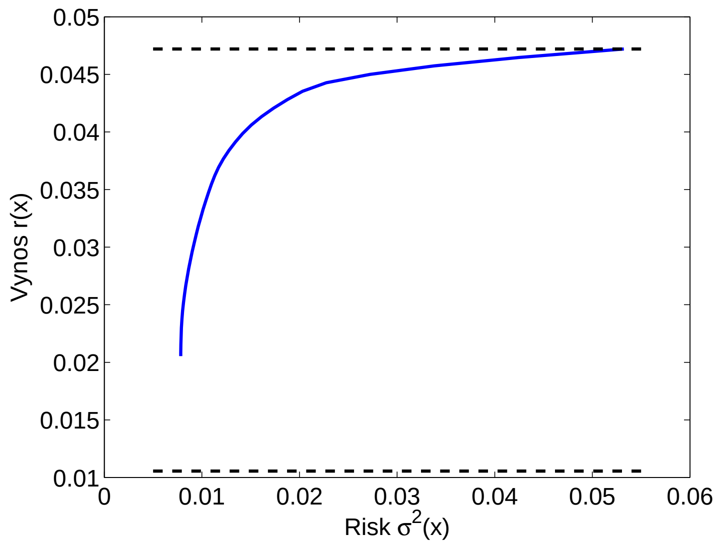
Účinnost Makowitzova modelu ověříme na vývoji akcii od srpna do prosince roku 2007. To znamená, že začátkem července nakoupíme akcie podle námi nalezené optimální strategie a budeme sledovat naš výnos ve zbytku roku.

Statistická interpretace

Pro doplnění ještě uvedeme statistickou interpretaci výnosu a rizika. Informace z tento není nezbytná k vypracování úlohy

Výnos $r(\boldsymbol{x})$ a riziko $\sigma(\boldsymbol{x})$ popisují náhodnou veličinu $\rho = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\rho}$, jejíž nodnota udává celkový výnos. Konkrétní realizaci náhodné veličiny ρ označíme písmenem

[1] Data jsou stažena z `http://finance.yahoo.com/`



Obrázek 1: Závislost výnosu na riziku.

r'. Za předpokladu, že ρ má normální (gaussovské) rozdělení, stačí znalost $r(\boldsymbol{x})$ a $\rho(\boldsymbol{x})$ k jeho plnému popisu, tj.

$$\rho \approx N(r'; r(\boldsymbol{x}), \sigma^2(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{\sigma(\boldsymbol{x})\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(r' - r(\boldsymbol{x}))^2}{2\sigma^2(\boldsymbol{x})}\right) .$$

Z rozdělení $N(r'; r(\boldsymbol{x}), \sigma^2(\boldsymbol{x}))$ lze spočítat pravděpodobnost náhodných jevů, které nás v této aplikaci zajímají. Například můžeme spočítat pravděpodobnost, že celkový výnos ρ bude menší než nějaká zvolená hondota θ

$$P(\rho \leq \theta) = \int_{-\infty}^{\theta} N(r'; r(\boldsymbol{x}), \sigma^2(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}r' . \tag{5}$$

Hodnotu integrálu (5) lze v Matlabu spočítat pomocí funkce

```
P = cdf('Normal',theta, r,sigma^2)
```

Úkoly k vypracování

1. Stáhněte si soubor `http://cmp.felk.cvut.cz/cmp/courses/OPT/cviceni/10/akcie.mat`. Soubor obsahuje:

   `AkcieOdhad [115x10]` Matice obsahující ceny (USD) akcii v období od ledna 1998 do července 2007. Tyto data použijte pro odhad parametrů Markowitzova modelu. Např. `AkcieOdhad(1,:)` je vektor cen akcii z července 2007 a `AkcieOdhad(end,:)` jsou ceny z ledna 1998.

   `AkcieTest [5x10]` Matice obsahující ceny (USD) akcii v období od srpna 2007 do prosince 2007. Tyto data použijte k otestování nalezeného rozložení portfolia.

   `Spolecnost {1x10 string}` Jména společností v pořadí, které odpovídá uložení cen akcií v maticích `AkcieOdhad` a `AkcieTest`.

`DatumOdhad [115x1 string]` Data k nimž se vztahují ceny akcii použitých pro odhad modelu.

`DatumTest [5x1 string]` Data k nimž se vztahují ceny akcii použitých pro testování.

2. S použijtím vzorců (2), (3) a (4) odhadněte parametry Markowitzova modelu z dat `AkcieOdhad`.

3. Interpretujte význam omezujících podmínek problému (1).

4. Jak by se změnila formulace problému (1), pokud bychom chtěli investovat do každé akcie maximálně 30% z celkové hodnoty portfolia ?

5. Vyřešte úlohu (1) pro r_p zadané v intevalu

   ```
   r_p = [MinRp : (MaxRp-MinRp)/50 : MaxRp ]
   ```

   kde `MinRp = min(r)`, `MaxRp = max(r)` a `r` je odhadnutý vektor středních hodnot. Pro takto spočtená rozložení portfolia $\boldsymbol{x}$ vyneste do grafu hodnoty výnosu $r(\boldsymbol{x})$ a rizika $\sigma(\boldsymbol{x})$. Měli by jste získat křivku podobnou té na obrázku 1.

   K řešení problému kvadratického programování použijte funci `quadprog` .

6. Simulujte skutečný výnos portfolia získaného řešením úlohy (1) při $r_p = 0.037$. Uvažujte nákup akcii za cenu z července 2007, tj. za hodnoty `AkciiOdhad(1,:)`. Do grafu vyneste celkový výnos (vztažený k investici v červenci 2007) z cen akcii od srpna 2007 do prosince 2007, které jsou uloženy v matici `AkcieTest`.

   Pro srovnání zobrazte výnosy získané při:

   (a) Rovnoměrném rozložení portfolia, tj. $x_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$.

   (b) Investici do akcii s největším očekávaným, tj. $x_i = 0$, $i \neq j$ a $x_j = 1$, kde $j = \operatorname*{argmax}_{i=1,\ldots,n} r_i$.

Bonusové úlohy

1. Dokažte, že kovarianční matice $\mathbf{V}$ je vždy pozitivně semidefinitní a tudíž, že problém (1) je konvexní.

2. Uvažujte situaci kdy kromě investice do n akcii máme navíc možnost investovat i do bezrizikového aktiva se výnosem r_0. Např. můžeme naše peníze uložit do banky s garantovaným úrokem r_0. Pro takto modifikovaný problém přeformulujte úlohu (1).

Reference

[1] Lenka Slamová and Tereza Baumová. Markowitzův model. Studijní materiály MFF UK Praha, červen 2008.