Tabulové cvičení z optimalizace
Lineární programování

1. Vyřešte úvahou tyto úlohy a napište vzorec pro optimální hodnotu. Ve všech úlohách optimalizujte přes proměnné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Parametry $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ a $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, jsou dány.

   (a) $\min \left\{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \right\}$

   (b) $\min \left\{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \mid -\mathbf{1} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \right\}$

   (c) $\max \left\{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \right\}$

   (d) $\max \left\{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^\top \mathbf{x} \leq 1 \right\}$

2. Najděte graficky množinu optimálních řešení $\mathbf{x}^\star \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^3$ úlohy

$$
\begin{array}{rl}
\min & c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\
\text{za podmínky} & x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& x_1 + x_2 \leq 10 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

   pro následující případy:

   (a) $\mathbf{c} = (-1, 0, 1)$

   (b) $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$

   (c) $\mathbf{c} = (0, 0, -1)$

3. Jste kuchařka v menze a máte uvařit pro studenty co nejlevnější oběd, ve kterém ovšem musí být dané minimální množství živin (cukrů, bílkovin a vitamínů). Oběd budete vařit ze tří surovin: brambor, masa a zeleniny. Kolik je třeba každé suroviny na jeden oběd?

	na jednotku brambor	na jednotku masa	na jednotku zaleniny	min. požadavek na jeden oběd
obsah cukrů	2	1	1	8
obsah bílkovin	2	6	1	16
obsah vitamínů	1	3	6	8
cena	25	50	80	

Table 1: Tabulka k příkladu 3.

4. Formulujte následující problém jako LP. Nalezněte největší hyperkouli

$$B(\mathbf{x}_c, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| \leq r\},$$

   kterou lze umístit do mnohostěnu

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i,\ i = 1, \dots, m \right\}.$$

   Jinými slovy, vyjádřete problém

$$
\begin{array}{rl}
\max & r \\
\text{za podmínky} & B(\mathbf{x}_c, r) \subseteq P
\end{array}
$$

   jako LP. Proměnné $\mathbf{x}_c, r$ vyjadřují střed respektive poloměr hledané hyperkoule.

5. *Aproximace matice ℓ_∞ normou.* ℓ_∞ normou matice $\mathtt{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rozumíme

$$\|\mathtt{A}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

   tedy číslo, které je maximem ze řádkových součtů prvků matice $\mathtt{A}$. Nechť je dáno $k{+}1$ matic $\mathtt{A}_0, \mathtt{A}_1, \dots, \mathtt{A}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pomocí LP najděte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, které minimalizuje normu

$$\|\mathtt{A}_0 + x_1 \mathtt{A}_1 + \cdots + x_k \mathtt{A}_k\|_\infty .$$