Lineární programování 4
Dualita a její interpretace

Úvod

V tomto cvičení si ukážeme vztah mezi *primární* a *duální* úlohou linearního programování. Uvidíme, že primární a duální úloha jsou komplementární. Duální úloha může být někdy jednodušší k vyřešení a také mnohdy poskytuje jiný náhled na zadaný problém. Vše budeme demonstrovat na úloze ε-*necitlivého prokládání* přímky množinou bodů v rovině.

Pro ilustraci výše uvedených pojmů uvažujme matici $\mathbf{A}$ (o rozměru $m \times n$) a vektory $\mathbf{b}$ ($m \times 1$) a $\mathbf{c}$ ($n \times 1$). K primární úloze

$$\min \left\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

je duální úlohou

$$\max \left\{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \right\}.$$

Všimněte si, že v prvním případě máme m omezení v n-dimenzionálním prostoru, zatímco ve druhém případě n omezení v m-dimenzionálním prostoru.

ε-necitlivé prokládání lineární funkce množinou bodů

ε-necitlivé prokládání přímky množinou bodů je alternativa k minimaxnímu prokládání, se kterým jste se již na cvičení setkali. Mějme množinu $\mathcal{T} = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)\} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^m$ a hledejme lineární fukci

$$f_{a,b}(x) = ax + b,$$

která nejlépe aproximuje body v $\mathcal{T}$. Oproti minimaxnímu prokládání zvolíme nyní jiné kritérium, založené na ε-*necitlivé ztrátové funkci* $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde

$$H(x, \varepsilon) = \max\{|x| - \varepsilon, 0\}.$$

Na hodnotu $\varepsilon > 0$ se dívejme v dalším textu jako na předem určený, fixní parametr. Funkci H použijeme k penalizaci y-ových vzdáleností bodů od proložené přímky. Kriteriální funkci definujeme jako součet penalizací přes všechny body v $\mathcal{T}$. Řešíme tedy úlohu

$$(a^*, b^*) \in \operatorname*{argmin}_{a,b \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{m} H\left(ax_i + b - y_i, \varepsilon\right). \tag{1}$$

Všimněme si, že penalizace bodu je nulová, pokud bod leží v ε-ovém pásu kolem proložené přímky. Pokud leží mimo tento pás, je penalizace rovna y-ové vzdálenosti od hranice pásu.

Úlohu 1 převedeme na úlohu lineárního programování následujícím způsobem:

$$(a^*, b^*) \in \operatorname*{argmin}_{a,b,\lambda_i \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tag{2}$$

$$\begin{array}{rcll} ax_i + b - y_i & \leq & \lambda_i + \varepsilon & \quad i = 1, \ldots, m \\ -ax_i - b + y_i & \leq & \lambda_i + \varepsilon & \quad i = 1, \ldots, m \\ \lambda_i & \geq & 0 & \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Úkoly k vypracování

1. Vygenerujte 100 bodů v rovině tak, aby jejich x-ové souřadnice měly uniformní rozdělení (funkce `rand`) a jejich y-ová vzálenost od určité (vámi zvolené) přímky p měla normální rozdělení (funkce `randn`). Dále zvolte vhodně parametr ε tak, aby alespoň 30% bodů leželo uvnitř ε-ového pásu kolem p a alespoň 30% bodů vně pásu.
2. Dokažte, že převod úlohy ε-necitlivého prokládání ze tvaru (1) na tvar (2) je skutečně korektní.
3. Vyřešte (primární) úlohu lineárního programování, která vyjadřuje problém ε-necitlivého prokládání pro vygenerované $\mathcal{T}$ a ε. Použijte funkci MATLABu `linprog` (převeďte nejprve všechna omezení přípustné množiny na tvar $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$). Vizualizujte nalezenou přímku a ε-pás. Vykreslete také pomocnou přímku p z předchozího úkolu, kolem které jste body vygenerovali.
4. Zformulujte a vyřešte duální úlohu k úloze ε-necitlivého prokládání. Ověřte platnost Silné věty o dualitě pro tento konkrétní problém.
5. Vizualizujte vektor řešení duální úlohy a slovně interpretujte výsledek. Demonstrujte platnost podmínek komplementarity (viz Slabá věta o dualitě).