

Lineární programování 3

Dualita a její interpretace

Úvod

V tomto cvičení si ukážeme vztah mezi *primární* a *duální* úlohou lineárního programování. Uvidíme, že primární a duální úloha jsou komplementární. Duální úloha může být někdy jednodušší k vyřešení a také mnohdy poskytuje jiný náhled na zadaný problém. Vše budeme demonstrovat na úloze *ε -necitlivého prokládání* přímkou množinou bodů v rovině.

Pro ilustraci výše uvedených pojmů uvažujme matici \mathbf{A} (o rozměru $m \times n$) a vektory \mathbf{b} ($m \times 1$) a \mathbf{c} ($n \times 1$). K primární úloze

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

je duální úlohou

$$\max \{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}.$$

Všimněte si, že v prvním případě máme m omezení v n -dimenzionálním prostoru, zatímco ve druhém případě n omezení v m -dimenzionálním prostoru.

ε -necitlivé prokládání lineární funkce množinou bodů

ε -necitlivé prokládání přímkou množinou bodů je alternativa k minimaxnímu prokládání, se kterým jste se již na cvičení setkali. Mějme množinu $\mathcal{T} = \{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^m$ a hledejme lineární funkci

$$f_{a,b}(x) = ax + b,$$

která nejlépe aproximuje body v \mathcal{T} . Oproti minimaxnímu prokládání zvolíme nyní jiné kritérium, založené na *ε -necitlivé ztrátové funkci* $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kde

$$H(x, \varepsilon) = \max\{|x| - \varepsilon, 0\}.$$

Na hodnotu $\varepsilon > 0$ se dívejme v dalším textu jako na předem určený, fixní parametr. Funkci H použijeme k penalizaci y -ových vzdáleností bodů od proložené přímky. Kritériální funkci definujeme jako součet penalizací přes všechny body v \mathcal{T} . Řešíme tedy úlohu

$$(a^*, b^*) \in \operatorname{argmin}_{a,b \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m H(ax_i + b - y_i, \varepsilon). \quad (1)$$

Všimněme si, že penalizace bodu je nulová, pokud bod leží v ε -ovém pásu kolem proložené přímky. Pokud leží mimo tento pás, je penalizace rovna y -ové vzdálenosti od hranice pásu.

Úlohu 1 převedeme na úlohu lineárního programování následujícím způsobem:

$$(a^*, b^*) \in \operatorname{argmin}_{a,b,\lambda_i \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (2)$$
$$\begin{aligned} ax_i + b - y_i &\leq \lambda_i + \varepsilon & i = 1, \dots, m \\ -ax_i - b + y_i &\leq \lambda_i + \varepsilon & i = 1, \dots, m \\ \lambda_i &\geq 0 & i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Úkoly k vypracování

1. Vygenerujte 100 bodů v rovině tak, aby jejich x -ové souřadnice měly uniformní rozdělení (funkce `rand`) a jejich y -ová vzdálenost od určité (vámi zvolené) přímky p měla normální rozdělení (funkce `randn`). Dále zvolte vhodně parametr ε tak, aby alespoň 30% bodů leželo uvnitř ε -ového pásu kolem p a alespoň 30% bodů vně pásu.
2. Dokažte, že převod úlohy ε -necitlivého prokládání ze tvaru (1) na tvar (2) je skutečně korektní.
3. Vyřešte (primární) úlohu lineárního programování, která vyjadřuje problém ε -necitlivého prokládání pro vygenerované \mathcal{T} a ε . Použijte funkci MATLABu `linprog` (převeďte nejprve všechna omezení přípustné množiny na tvar $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$). Vizualizujte nalezenou přímku a ε -pás. Vykreslete také pomocnou přímku p z předchozího úkolu, kolem které jste body vygenerovali.
4. Zformulujte a vyřešte duální úlohu k úloze ε -necitlivého prokládání. Ověřte platnost Silné věty o dualitě pro tento konkrétní problém.
5. Vizualizujte vektor řešení duální úlohy a slovně interpretujte výsledek. Demonstrujte platnost podmínek komplementarity (viz Slabá věta o dualitě).