

Lineární programování 2

Simplexová metoda

Cíl

Mějme danu množinu

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$. Na této množině chceme minimalizovat lineární funkci $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$. Hledáme $\mathbf{x}_o \in X$, pro které

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}_o = \min_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

Předpokládáme navíc, že všechny řádky \mathbf{A} jsou lineárně nezávislé, tj. \mathbf{A} má hodnost m . Takovému zadání říkáme *úloha lineárního programování ve standardním tvaru*. Pro vyřešení úlohy máme k dispozici *simplexovou metodu*.

Hlavní implementační úkol

Implementujte dvoufázovou simplexovou metodu jako funkci `x=simplex(c,A,b)`, kde \mathbf{c} je matice $n \times 1$, \mathbf{A} matice $m \times n$ a \mathbf{b} matice $m \times 1$. Trojice \mathbf{c} , \mathbf{A} , \mathbf{b} definuje úlohu lineárního programování ve standardním tvaru. Návrátová hodnota \mathbf{x} je následující:

- Pokud má vstupní úloha optimální řešení, je \mathbf{x} matice $n \times 1$ rovnající se nalezenému optimálnímu řešení.
- V případě, že optimální řešení neexistuje, je \mathbf{x} prázdná matice.

Pro vstupní matici \mathbf{A} předpokládejte, že podmínky kladené standardním tvarem jsou splněné. Hodnost matice můžete případně ověřit pomocí funkce MATLABu `rank`.

Aplikování na konkrétní úlohy

Vyřešte pomocí funkce `simplex` následující úlohy.

1.

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{za podmíněk} & -3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & -x_1 - 3x_3 + x_4 \\ \text{za podmíněk} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array}$$

3. Úloha *Jistá výhra* z předchozího cvičení *Lineární programování 1*.

4. Úloha *Minimalizní prokládání lineární funkce množinou bodů* z předchozího cvičení *Lineární programování 1*.

Konečnost metody – doplňkové úkoly pro dobrovolníky

Vyřešit zadání v této sekci není povinné a nebude bodováno. Je určeno pro toho, kdo si chce s implementací více pohrát.

U základního algoritmu simplexové metody není zaručená jeho konečnost. V případě degenerovaného bázevého řešení může nastat situace, kdy algoritmus cyklí mezi několika degenerovanými bázemi, které odpovídají jedinému bázevému řešení. Aktuální hodnota účelové funkce se v tomto případě nemění.

V souvislosti s konečností metody řešte následující dva úkoly:

1. Proveďte modifikaci algoritmu, která zajistí, že se funkce `simplex` nikdy nezacyklí. Prostudujte běžně používané metody. Popište ve zprávě tu, kterou použijete.
2. Nalezněte takové zadání úlohy lineárního programování ve standardním tvaru, které by k zacyklení nemodifikované implementace vedlo. Vypište, které báze se v cyklu střídají.

Jako výstup je kromě implementace v MATLABu vyžadována písemná zpráva v pdf formátu.