Konvexní množiny, funkce a optimalizační problémy

Konvexní množiny

Příklad 1 (interval): Ukažte, že pro libovolná $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ je interval $\langle a, b \rangle$ konvexní množina.

Příklad 2 (konvexní obal): Mějme množinu k bodů $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$. Definujme množinu

$$\mathcal{X} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i \, , \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \, , \alpha_i \geq 0 \, , i = 1, \ldots, k \right\} .$$

Ukažte, že množina $\mathcal{X}$, která se nazývá konvexním obalem nožiny bodů $\boldsymbol{a}_i$,$i = 1, \ldots, k$, je skutečně konvexní.

Příklad 3 (lineární omezení): Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$. Dokažte, že všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{C}\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{d} \end{array}$$

tvoří konvexní množinu.

Příklad 4: Mějme k dvojic $(\boldsymbol{a}_i, b_i) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, k$. Definujme množiny

$$\mathcal{X}_i = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a}_i + b_i \geq \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a}_j + b_j \, , j \in \{1, \ldots, k\} \setminus i \} \, , \qquad i = 1, \ldots, k \, .$$

Dokažte, že množiny $\mathcal{X}_i$, $i = 1, \ldots, k$ jsou konvexní. Jaká je geometrická interpretace těchto množin ?

Příklad 5 (Voronoiův diagram): Mějme k vektorů $\boldsymbol{\mu}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$. Definujme množiny

$$\mathcal{X}_i = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_i \| \leq \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_j \| \, , j \in \{1, \ldots, k\} \setminus i \} \, , \qquad i = 1, \ldots, k \, .$$

Dokažte, že množiny $\mathcal{X}_i$, $i = 1, \ldots, k$ jsou konvexní. Ukažte, že tento problém je speciálním případem úlohy z příkladu 4.

Příklad 6 (Elipsa): Mějme vektor $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$, pozitivně semidefinitní symetrickou matici $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a číslo $r > 0$. Definujme množinu

$$\mathcal{X} = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq r^2 \} \, .$$

Dokažte, že množina $\mathcal{X}$ je konvexní. Jaká je geometrická interpretace množiny $\mathcal{X}$?

Příklad 7: Které z následujících množin jsou konvexní? Pokud to jde, zkuste množinu načrtnout v prostoru malé dimenze.

1. $\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \geq 1 \,\}$
2. $\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \,\}$
3. $\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \,\}$
4. $\mathbb{R}^n \setminus \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \geq 1 \,\}$
5. $\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1 \,\}$
6. $\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| < 1 \,\}$
7. $\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq \beta \,\}$
8. $\{\, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T \,\}$ (kde $\mathbb{R}^{n \times n}$ značí množinu všech matic $n \times n$)
9. $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0,\ xy = 1 \,\}$
10. $\mathrm{conv}\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \{-1, 0, 1\},\ \sum_{i=1}^n |x_i| = 1 \,\}$

Konvexní funkce

Příklad 1 (normy): Normou na $\mathbb{R}^n$ je libovolná funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, typicky se značí symbolem $\|\boldsymbol{x}\| = f(\boldsymbol{x})$, která pro libovolné $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ splňuje:

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$; $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ iff $\boldsymbol{x} = 0$
- $\|t\boldsymbol{x}\| = |t|\|\boldsymbol{x}\|$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

Dokažte, že norma je konvexní funkce.

Nápověda: z definice; použitím vlastnosti 2 a 3.

Příklad 2 (nejmenší čtverce): Řešení soustavy rovnic pomocí metody nejmenších čtverců vyžaduje minimalitaci kritéria

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 ,$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Ukažte, že kriteriální funkce $f(\boldsymbol{x})$ je konvexní. *Nápověda: Hessian $f(\boldsymbol{x})$ je positivně semidefinitní.*

Příklad 3 (affinní+konvexní funkce): Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ je vektor. Ukažte, že funkce $g(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b})$ je konvexní.

Nápověda: z definice.

Příklad 4 (Log-bariérová funkce): Mějme k dvojic $(\boldsymbol{a}_i, b_i) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, k$. Nechť $\mathcal{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a}_i < b_i\ , i = 1, \ldots, k\}$. Ukažte, že funkce

$$f(\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{k} \log(b_i - \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a}_i) ,$$

definovaná na množině $\mathcal{X}$ je konvexní.

Nápověda: aplikace věty z příkladu 3.

Příklad 5 (bodové maximum konvexních funkcí): Nechť $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ jsou konvexní funkce. Ukažte, že funkce $g(\boldsymbol{x}) = \max_{i=1,\ldots,m} f_i(\boldsymbol{x})$ je konvexní.

Nápověda: pro $m = 2$ se odvodí z definice; pro $m > 2$ z indukce.

Příklad 6 (robustní prokládání přímky): Robustní prokládání přímky množinou bodů $(\boldsymbol{x}_i, y_i) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, m$ vyžaduje minimalizaci kritéria

$$f(\boldsymbol{a}, b) = \sum_{i=1}^{m} \max\{-\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}_i + b + y_i - \varepsilon,\ 0\ ,\ \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}_i + b - y_i - \varepsilon\}\ ,$$

kde $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$. Dokažte, že kritérium $f(\boldsymbol{a}, b)$ je konvexní funkcí.

Nápověda: aplikace věty z příkladu 5.

Příklad 7 (entropie): Mějme vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ a $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Vektor $\boldsymbol{x}$ může například popisovat rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny. Definujme entorpii

$$f(\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1} x_i \log x_i\ .$$

Ukažte, že $f(\boldsymbol{x})$ je konkávní funkcí.

Nápověda: suma konvexních funkcí je konvexní fce + druhá derivace $x \log x$ je kladná.

Příklad 8: Nechť $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ značí vektor z $\mathbb{R}^n$ a nechť je hodnota funkce $f(\boldsymbol{x})$ zadána jako

1. aritmetický průměr čísel $x_1, \ldots, x_n$
2. variance čísel $x_1, \ldots, x_n$
3. $\min_{i=1}^{n} |x_i|$
4. $\max_{i=1}^{n} |x_i|$
5. $\max_{i=1}^{n} x_i - \min_{i=1}^{n} x_i$

Pro každý případ buď ukažte, zda je funkce f konvexní či konkávní na $\mathbb{R}^n$, nebo nic z toho.

Příklad 9: Jsou tyto funkce konvexní? Dokažte.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$
2. $f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}}$

Nápověda: Spočtěte druhou derivaci/Hessián.

Příklad 10: Jaká musí být funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, aby její epigraf byl

1. poloprostor?
2. konvexní mnohostěn?

Napište (vzorcem) co nejobecnější takové funkce.

Příklad 11: Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ (tedy definiční obor funkce f je množina všech matic rozměru $m \times n$) je zadána jako

$$f(\boldsymbol{A}) = \max\{\ \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2 \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\ \}$$

1. Je výpočet funkce f konvexní optimalizační úloha?
2. Dokažte, že f je konvexní funkce.

Nápověda: Jde o maximum konvexních funkcí, tedy f je konvexní.

Konvexní problémy

Příklad 1 (Čebyševův střed): Mějme polyhedr

$$\mathcal{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a}_i \le b_i\,, i = 1, \dots, m\}\,,$$

kde dvojice $(\boldsymbol{a}_i, b_i) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, m$ jsou dány. Zaveďme množinu

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\mu}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}\| \le r, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n, R > 0\}\,,$$

která obsahuje body ležící uvnitř koule se středem $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ a poloměrem r. Předpokládejme, že chceme nalézt kouli $\mathcal{B}(\boldsymbol{\mu}, r)$ s maximálním poloměrem r, která celá leží uvnitř polyhedru $\mathcal{X}$, tj. $\mathcal{B}(\boldsymbol{\mu}, r) \subseteq \mathcal{X}$. Lze tuto úlohu převést na konvexní optimalizační problém?

Příklad 2 (kvadratické programování): Mějme optimalizační problém

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T \mathbf{P} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{q}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{x} &\le \boldsymbol{b} \\ \mathbf{C}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{d} \end{aligned}$$

kde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$. Kdy je tento problém konvexní?

Příklad 3 (maximální entropie): Mějme optimalizační problém

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i &= 1\,, \\ x_i &\ge 0\,. \end{aligned}$$

Je tento problém konvexní?

Příklad 4: Uvažujme bod a elipsoid (elipsoid uvažujeme i s vnitřkem, nejen jeho povrch) v n-rozměrném prostoru. Zformulujte úlohu nalezení vzdálenosti bodu od elipsoidu jako konvexní optimalizační úlohu.