Tabulové cvičení z optimalizace
Lagrangeovy multiplikátory

13. listopadu 2011

1. Najděte kandidáty na lokální extrém funkce $f(x, y) = 2x - y$ na kružnici $x^2 + y^2 = 1$.
2. Spočítejte rozměry půllitru tak, aby na něj bylo potřeba co nejméně skla. Tloušťku skla zanedbejte.
3. Nalezněte minimum $\|\mathbf{Cx} - \mathbf{d}\|$ za podmínky $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Přepokládejte, že matice $\mathbf{C}$ má plnou hodnost a soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je podurčená, tj. má více jak jedno řešení.
4. Odvoďte vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu $\mathbf{x} \in \Re^n$ od nadroviny $\{\mathbf{y} \in \Re^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{y} + b = 0\}$.
5. Spočtěte jaká je plocha největšího obdélníku, který může být vepsán do kruhu s poloměrem 1.
6. Shannonova entropie rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny je definována vzorcem

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \,.$$

   Rozdělení pravděpodobnosti diskrétní veličiny je určené čísly $p_1, p_2, \ldots, p_n$, která jsou nezáporná a sčítající do 1. Nalezněte diskrétní rozdělení s maximální entropii.
7. V paprskové optice platí *Fermatův princip nejkratšího času*: cesta mezi libovolnými dvěma body na paprsku má takový tvar, aby ji světlo proběhlo za nejkratší čas. Z tohoto principu odvoďte metodou Lagrangeových multiplikátorů zákon odrazu od křivého zrcadla o rovnici $h(\mathbf{x}) = 0$.