

Cvičení z optimalizace

Metoda nejmenších čtverců 2

Vojtěch Franc, 2011

1 Identifikace parametrů autoregresního modelu

Mějme zadanou posloupnost reálných čísel y_0, y_1, \dots, y_T . Posloupnost může například popisovat signál digitalizovaný v diskretních časových okamžicích $t = 0, 1, \dots, T$. Naším cílem bude odhadnout parametry autoregresního modelu této posloupnosti, který předpokládá, že

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t \geq p, \quad (1)$$

tj. t -tý prvek posloupnosti je lineární kombinací p předcházejících prvků a náhodné odchylky (šumu) ε_t . Číslo $p \in \mathcal{N}^+$ se nazývá řádem modelu. Autoregresní model p -tého řádu je určen vektorem parametrů $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$. Odhadování těchto parametrů z dat, tj. ze zadané posloupnosti y_0, y_1, \dots, y_T , se v teorii řízení nazývá *identifikace systému*. Jedna z metod identifikace je založena na hledání takových parametrů, které zajistí, že model co nejlépe odpovídá zadaným datům ve smyslu minimalizace součtu kvadrátů odchylek ε_t pro $t = p, \dots, T$. To znamená, že hledáme vektor parametrů

$$\hat{\mathbf{a}} = \underset{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{p+1}}{\operatorname{argmin}} F(\mathbf{a}), \quad (2)$$

kde

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{t=p}^T \varepsilon_t^2 = \sum_{t=p}^T \left(\left(a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} \right) - y_t \right)^2.$$

Řešení problému (2) lze převést na řešení přeürčené soustavy lineárních rovnic $\mathbf{M}\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců.

Takto získaný model se dá použít například pro kompresi posloupnosti y_0, y_1, \dots, y_T . V tomto případě postačí uchovat podsekvenci y_0, \dots, y_{p-1} a odhadnuté parametry $\hat{\mathbf{a}}$. Zbývající členy posloupnosti y_p, \dots, y_T vygenerujeme rekurzivním použitím (1). Koeficient komprese je tedy $T/(2p+1)$. Na podobné myšlenky je postavena komprese řečového signálu v reálném čase, která se používá například v mobilních telefonech.

Úkoly k vypracování

1. Stáhněte si WAV soubor se zvukem gongu <http://cmp.felk.cvut.cz/cmp/courses/OPT/cviceni/07/gong.wav> a nahrajte si ho do Matlabu pomocí příkazu

```
[y,Fs]=wavread('gong.wav');
```

y je vektor obsahující hodnoty zvukové sekvence vzorkované s frekvencí F_s . Pokud máte počítač se zvukovou kartou, můžete si signál přehrát pomocí příkazu `sound(y,Fs)`.

2. Formulujte úlohu (2) jako problém řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{M}\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců, tj. jako úlohu $\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{M}\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$. Napište explicitní tvar matice \mathbf{M} a vektoru \mathbf{b} . Pro nahranou zvukovou sekvenci odhadněte parametry autoregresního modelu s řádem $p = 300$ s využitím operátoru Matlabu `M\b`.
3. Implementujte algoritmus řešící problém nejmenších čtverců pomocí QR rozkladu. Vstupem algoritmu necht' je dvojice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $m > n$ a výstupem vektor $\hat{\mathbf{a}}$, který je řešením $\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{M}\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$. Předpokládejte, že matice \mathbf{M} má plnou hodnotu. Uvnitř algoritmu použijte funkci Matlabu `[Q,R] = qr(A,0)` pro získání matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} . Použijte Vaši implementaci k řešení problému z úkolu 2 a porovnejte Váš výsledek s výsledkem získaným pomocí `M\b`. Bude váš algoritmus fungovat i v případě, kdy matice \mathbf{M} nemá plnou hodnotu? Pokud ne, jak je třeba Váš algoritmus změnit?
4. Použijte odhadnutý model k vygenerování syntetického zvuku gongu. Porovnejte synteticky vygenerovaný a originální zvuk gongu graficky, tj. zobrazte oba průběhy do jednoho grafu pomocí funkce `plot`. Pokud to Váš počítač umožňuje, přehrajte si oba zvukové signály pomocí příkazu `sound(y,Fs)`.