Cvičení

0.1. Ukažte, že pokud matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ komutují, platí $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$. Je tato podmínka nutná?

0.2. Mějme soustavu rovnic pro neznámé $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} + \mathbf{By} &= \mathbf{a} \\ \mathbf{Cx} + \mathbf{Dy} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

a) Vyjádřete soustavu ve tvaru $\mathbf{Pu} = \mathbf{q}$.

b) Je-li $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, ukažte, že $\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{b})$. Jakou to má výhodu oproti počítání $\mathbf{u}$ přímo ze soustavy $\mathbf{Pu} = \mathbf{q}$?

0.3. Napište explicitní řešení těchto rovnic pro neznámou matici $\mathbf{X}$ (předpokládejte, že případná inverze existuje):

a) $\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{A}^2\mathbf{X}$

b) $\mathbf{X} - \mathbf{A} = \mathbf{XB}$

c) $2\mathbf{X} - \mathbf{AX} = 2\mathbf{A} = \mathbf{0}$

0.4. Najděte řešení soustavy rovnic $\{\, \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{Cx} = \mathbf{A}^T\mathbf{y} \,\}$, kde $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou neznámé vektory, matice $\mathbf{A}$ je široká s plnou hodností a $\mathbf{C}$ je čtvercová regulární. Najděte jen vztah pro $\mathbf{x}$, vztah pro $\mathbf{y}$ nás nezajímá.

Řešení: $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{AC}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}$

0.5. Zobrazení $\operatorname{vec}\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{mn}$ ('vektorizace' matice, v Matlabu označeno `A(:)`) je definováno tak, že $\operatorname{vec}\mathbf{A}$ je matice $\mathbf{A}$ přerovnaná po sloupcích do vektoru. *Kroneckerův součin matic* (v Matlabu pojmenovaný `kron`) je $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je definován jako

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Pro libovolné tři matice (s kompatibilními velikostmi) platí rovnost

$$\operatorname{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A}) \operatorname{vec}\mathbf{B}. \tag{1}$$

Použijte tohoto vzorce pro nalezení explicitního řešení následujících soustav rovnic. Neznámá matice je $\mathbf{X}$. Předpokládejte, že počet rovnic je rovný počtu neznámých. Předpokládejte, že matice a vektory mají nejobecnější možné rozměry, aby to dávalo smysl.

a) $\{\, \mathbf{b}_i = \mathbf{Xa}_i,\ i = 1, \dots, k \,\}$

b) $\{\, \mathbf{b}_i^T\mathbf{Xa}_i = 0,\ i = 1, \dots, k \,\}$

c) $\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T = \mathbf{C}$

0.6. Dokažte *Sherman-Morrisonův vzorec* pro inverzi matice $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{uv}^T$ ($\mathbf{A}$ je čtvercová regulární):

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{uv}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 - \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right).$$

0.7. ($\star$) Čtvercové matici $\mathbf{A}$ se říká *ortogonální*, když platí $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Uvažujte zobrazení $f(\mathbf{A}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}$.

a) Dokažte, že pro antisymetrickou matici $\mathbf{A}$ je matice $f(\mathbf{A})$ ortogonální.
b) Dokažte, že pro ortogonální $\mathbf{A}$ je $f(\mathbf{A})$ antisymetrická.
c) Dokažte, že zobrazení f je inverzí sama sebe, tedy $f(f(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$ pro každé $\mathbf{A}$.

Před důkazy na papíře se přesvědčte v Matlabu, že tvrzení platí pro náhodné matice.

0.8. Které z těchto soustav rovnic jsou lineární? Malá písmena značí vektory, velká matice. Předpokládejte co nejobecnější rozměry matic a vektorů. Jaký je počet rovnic a neznámých v každé soustavě?

a) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, neznámá $\mathbf{x}$
b) $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 1$, neznámá $\mathbf{x}$
c) $\mathbf{a}^T\mathbf{X}\mathbf{b} = 0$, neznámá $\mathbf{X}$
d) $\{\, \mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \mathbf{A},\ \mathbf{Y}^T\mathbf{X} = \mathbf{B} \,\}$, neznámé $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$

0.9. Součet prvků na diagonále čtvercové matice se nazývá její *stopa*.

a) Dokažte, že matice $\mathbf{AB}$ a $\mathbf{BA}$ mají stejnou stopu.
b) Dokažte, že rovnice $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ nemá řešení pro žádné $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.

0.10. *Komutátorem* dvou matic rozumíme matici $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$. Dokažte, že platí

a) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{B}, \mathbf{A}] = 0$
b) $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$

0.11. ($\star$) Nechť $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$. Ukažte, že $\det(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 1 - \mathbf{v}^T\mathbf{u}$.