Master theorem

19.

Daný rekurzivní algoritmus pracuje tak, že pro $n > 1$ data rozdělí na 4 části stejné velikosti, zpracuje 5 těchto částí (tj. jednu z nich dvakrát) a pak jejich řešení spojí. Na samotné rozdělení problému a spojení řešení menších částí potřebuje dobu úměrnou hodnotě $n^2 - n$.

a. Nakreslete první tři úrovně (kořen a dvě další) stromu rekurze.

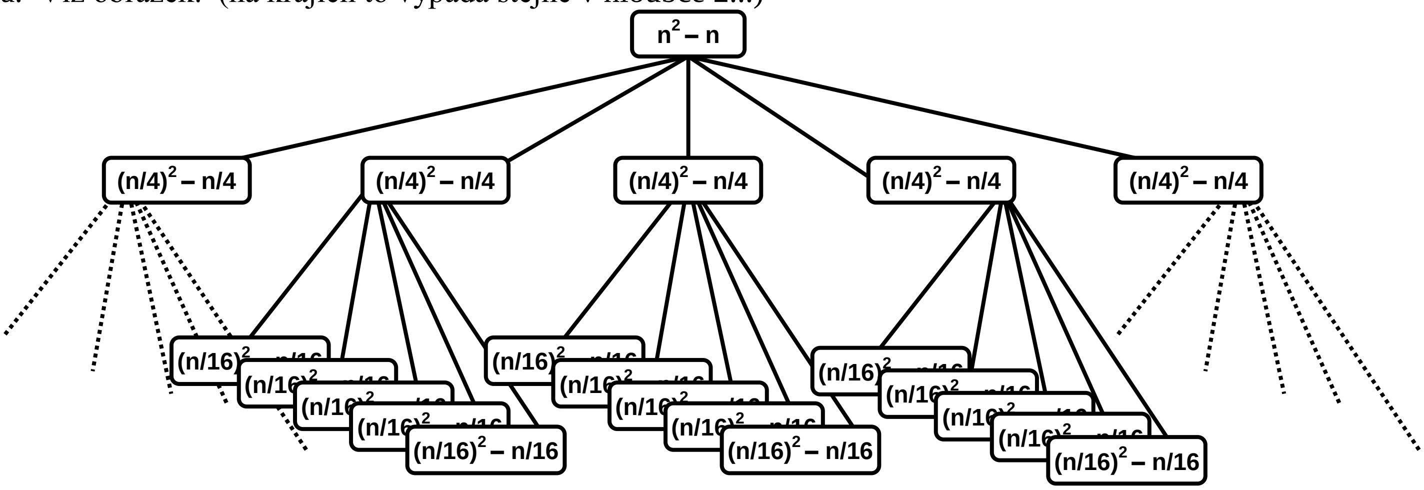
b. Předpokládejte, že kořen stromu odpovídá činnosti algoritmu nad daty velikost n.
Vypočtěte cenu uzlu v hloubce 2 (=ve 3. úrovni) stromu. Cena uzlu je doba, kterou algoritmus potřebuje na rozdělení dat a sloučení vyřešených podproblémů při velikosti dat, která odpovídá hloubce uzlu.

c. Vypočtěte hloubku stromu rekurze.

d. Zjistěte asymptotickou složitost daného algoritmu použitím Mistrovské věty.

----

a. Viz obrázek. (na krajích to vypadá stejně v hloubce 2...)



b. Cena je vepsána v uzlech v hloubce 2, tj. je to $n^2/256 - n/16$.

c. Hloubka je zřejmě $\log_4(n)$.

d. Nutno určit, která podmínka 1.-3. Mistrovské věty nastává.
Zkoumáme proto vztah veličin
$n^{\log_4(5)}$ a $n^2 - n$.
Zřejmě je $log_4(5) \doteq 1.161$, takže např pro $\varepsilon = 0.5$ bude platit

(*) $n^{\log_4(5)+\varepsilon} < n^2 - n$, pro dostatečně veliká n, tedy také automaticky

$$n^2 - n \in \Omega\left(n^{\log_4(5)+\varepsilon}\right),$$

čímž máme splněnu první část podmínky 3. Mistrovské věty. Ověřme její druhou část. Ta praví, že musí být

(**) $5\left(\left(\frac{n}{4}\right)^2 - \frac{n}{4}\right) \le c(n^2 - n)$ pro nějaké $c < 1$ a všechna dostatečně velká n.

Vidíme, že nalevo díky druhé mocnině získáme ve jmenovateli 16, zkusme tedy položit c zdola blízko 1, např. $c = \frac{15}{16}$. Pak dostaneme

(***) $5\left(\left(\frac{n}{4}\right)^2 - \frac{n}{4}\right) \le \frac{15}{16}(n^2 - n)$. Upravíme levou stranu, dostaneme

$\frac{5}{16}\left(n^2 - 4n\right) \le \frac{15}{16}(n^2 - n)$ a zkrátíme, dostaneme

$n^2 - 4n \le 3n^2 - 3n$. To upravíme na konečný tvar

$-n \le 2n^2$.

Poslední nerovnost platí pro každé přirozené *n*.

Protože jsme prováděli pouze ekvivalentní úpravy nerovnice (***), uzavíráme, že jsme našli $c = \frac{15}{16} < 1$, pro které platí (**), tudíž je splněna i druhá část podmínky 3. Mistrovské věty, a můžeme tvrdit, že asymptotická složitost daného algoritmu je $\Theta\left(n^2 - n\right) = \Theta\left(n^2\right)$.

Poznámka

Někdo může namítnout, že vztah (*) „spadl z nebe“ a že není jasné, proč by měl platit. Ověřme to.

Máme ukázat, že platí

(*) $n^{\log_4(5)+\varepsilon} < n^2 - n$, pro $\varepsilon = 0.5$ a pro dostatečně veliká *n*.

Zřejmě platí

(i) $log_4(5) + \varepsilon \doteq 1.161 + 0.5 < 1.75.$

Tedy také platí

(ii) $n^{\log_4(5)+0.5} < n^{1.75}$.

Pokud tedy ukážeme, že pro všechna dostatečně velká *n* platí

$n^{1.75} < n^2 - n$,

budeme hotovi.

To je však jednoduché, vydělme obě strany poslední nerovnice členem $n^{1.75}$. Dostaneme

(****) $1 < \frac{n^2 - n}{n^{1.75}} = n^{0.25} - n^{-0.75} = \sqrt[4]{n} - \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$.

Na pravé straně roste výraz $\sqrt[4]{n}$ do nekonečna a naopak výraz $\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ konverguje k nule, takže celkově výraz $\sqrt[4]{n} - \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ roste do nekonečna, tudíž je pro dostatečně velké *n* větší než 1, čímž je ověřena nerovnost (****) a jsme hotovi.