Datové struktury a algoritmy

Část 11

Vyhledávání, zejména rozptylování

Petr Felkel

Topics

Vyhlednávání

Rozptylování (hashing)

- Rozptylovací funkce
- Řešení kolizí
  - Zřetězené rozptylování
  - Otevřené rozptylování
    - Linear Probing
    - Double hashing

Slovník - Dictionary

Řada aplikací potřebuje

– dynamickou množinu

– s operacemi: Search, Insert, Delete

= slovník

Př. Tabulka symbolů překladače

identifikátor	typ	adresa
suma	int	0xFFFFDC09
...	...	...

Vyhledávání

asociativní

Porovnáváním klíčů **Ω(log n)**

- –Nalezeno, když klíč_prvku = hledaný klíč
- –např. sekvenční vyhledávání, BVS,...

adresní vyhledávání

Indexováním klíčem (přímý přístup) **Θ(1)**

- –klíč je přímo indexem (adresou)
- –rozsah klíčů ~ rozsahu indexů

Rozptylováním **průměrně Θ(1)**

- –výpočtem adresy z hodnoty klíče

Rozptylování - Hashing

= kompromis mezi rychlostí a spotřebou paměti

- ∞ času - sekvenční vyhledávání
- ∞ paměti - přímý přístup (indexování klíčem)
- málo času i paměti
  - hashing
  - velikost tabulky reguluje čas vyhledání

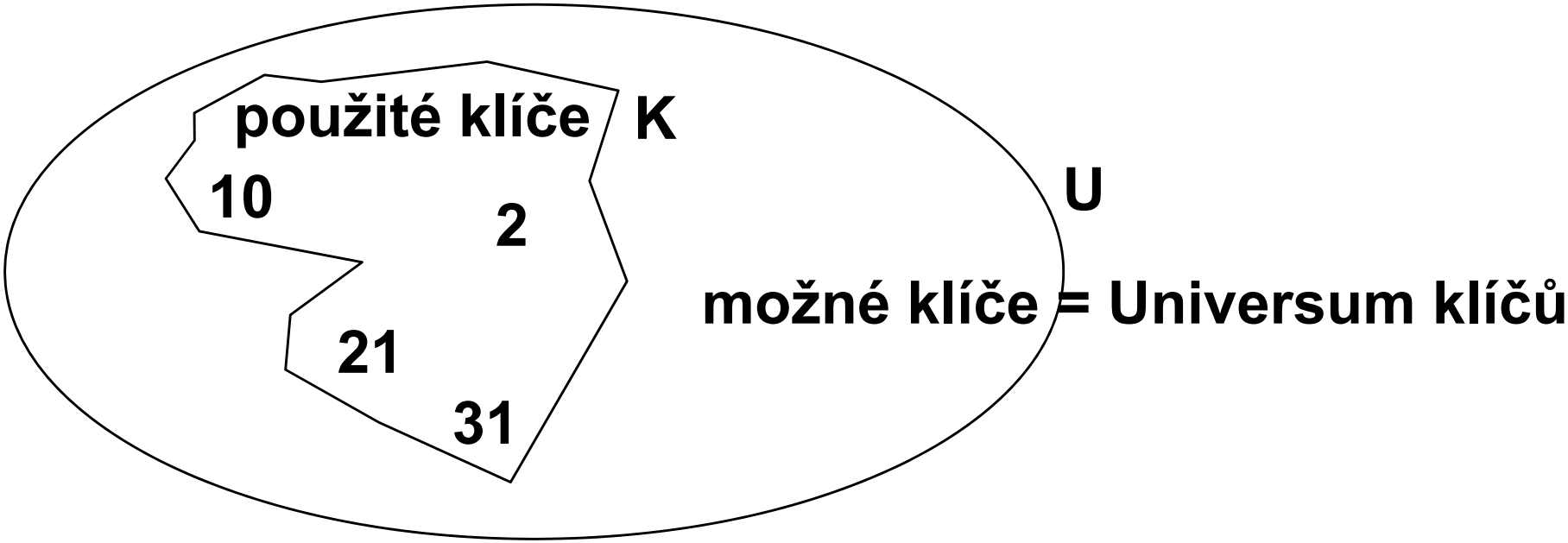
Rozptylování - Hashing

Konstantní očekávaný čas pro *vyhledání* a *vkládání* (*search* and *insert)* !!!

Něco za něco:

- čas provádění ~ délce klíče
- není vhodné pro operace *výběru podmnožiny* a *řazení* (*select* a *sort)*

Rozptylování

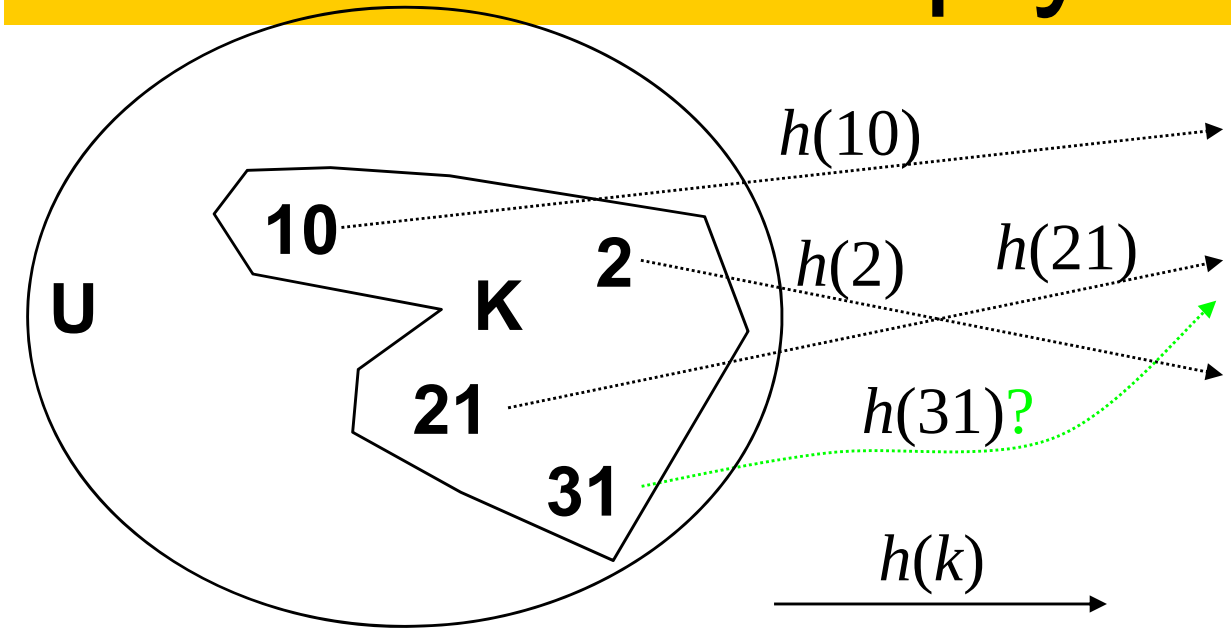


Rozptylování vhodné pro |K| << |U|

K množina použitých klíčů

U universum klíčů

Rozptylování



0	10
1	21
2	2
...	
M-1	

Dvě fáze

1. Výpočet rozptylovací funkce $h(k)$
   ($h(k)$ vypočítá adresu z hodnoty klíče)
2. Vyřešení kolizí

   $h(31)$ ..... kolize: index 1 již obsazen

1. Výpočet rozptylovací funkce $h(k)$

Rozptylovací funkce $h(k)$

Zobrazuje

množinu klíčů $K \in U$

do intervalu adres $A = \langle a_{min}, a_{max} \rangle$, *obvykle* $\langle 0, M-1 \rangle$

$|U| >> |K| \cong |A|$

($h(k)$ Vypočítá adresu z hodnoty klíče)

Synonyma: $k_1 \neq k_2$, $h(k_1) = h(k_2)$

= kolize

Rozptylovací funkce $h(k)$

Je silně závislá na vlastnostech klíčů a jejich reprezentaci v paměti

Ideálně:

- výpočetně co nejjednodušší (rychlá)
- aproximuje náhodnou funkci
- využije rovnoměrně adresní prostor
- generuje minimum kolizí
- proto: využívá všechny složky klíče

Rozptylovací funkce $h(k)$

Každá hashovací funkce má slabá místa, kdy pro různé klíče dává stejnou adresu

Univerzální hashování

- Místo jedné hashovací funkce $h(k)$ máme konečnou množinu $\boldsymbol{H}$ funkcí mapujících U do intrervalu $\{0, 1, \ldots, m-1\}$
- Při zpuštění programu jednu náhodně zvolíme
- Tato množina je univerzální, pokud pro různé klíče $x,y \in U$ vrací stejnou adresu $h(x) = h(y)$ přesně v $|\boldsymbol{H}|/m$ případech
- Pravděpodobnost kolize při náhodném výběru funkce $h(k)$ je tedy přesně $1/m$

Rozptylovací funkce *h*(*k*) - příklady

Příklady fce *h*(*k*) pro různé typy klíčů

- reálná čísla
- celá čísla
- bitová
- řetězce

Chybná rozptylovací funkce

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro reálná čísla 0..1

– multiplikativní: **h(k,M) = round(k * M)**

(neoddělí shluky blízkých čísel)

M = velikost tabulky (table size)

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro celá čísla (w-bitová) - *for w-bit integers*

- multiplikativní: (kde M je prvočíslo)
  - **h(k,M) = round(k /2^w * M)**
- modulární:
  - **h(k,M) = k % M**
- kombinovaná:
  - **h(k,M) = round(c * k) % M, c $\in$<0,1>**
  - **h(k,M) = (int)(0.616161 * (float) k) % M**
  - **h(k,M) = (16161 * (unsigned) k) % M**

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady
Hash functions *h*(*k*) - examples

Rychlá, silně závislá na reprezentaci klíčů

h(k) = k & (M-1) **pro M = 2^x (není prvočíslo) ,**

a & = bitový součin

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro řetězce *(for strings):*

```
int hash( char *k, int M )
{
    int h = 0, a = 127;
    for( ; *k != 0; k++ )
        h = ( a * h + *k ) % M;
    return h;
}
```

Hornerovo schéma: $k_2 * a^2 + k_1 * a^1 + k_0 * a^0 =$

$((k_2 * a) + k_1) * a + k_0$

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro řetězce: (pseudo-) randomizovaná

```
int hash( char *k, int M )
{  int h = 0, a = 31415; b = 27183;
   for( ; *k != 0; k++, a = a*b % (M-1) )
       h = ( a * h + *k ) % M;
   return h;
}
```

Univerzální rozptylovací fce

- kolize s pravděpodobností 1/M
- odlišná náhodná konstanta pro různé pozice v řetězci

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-chyba

Častá chyba: funkce *vrací stále stejnou hodnotu*

– chyba v konverzi typů

– funguje, ale vrací blízké adresy

– proto generuje hodně kolizí

=> *aplikace je extrémně pomalá*

Shrnutí

Rozptylovací funkce h(k)

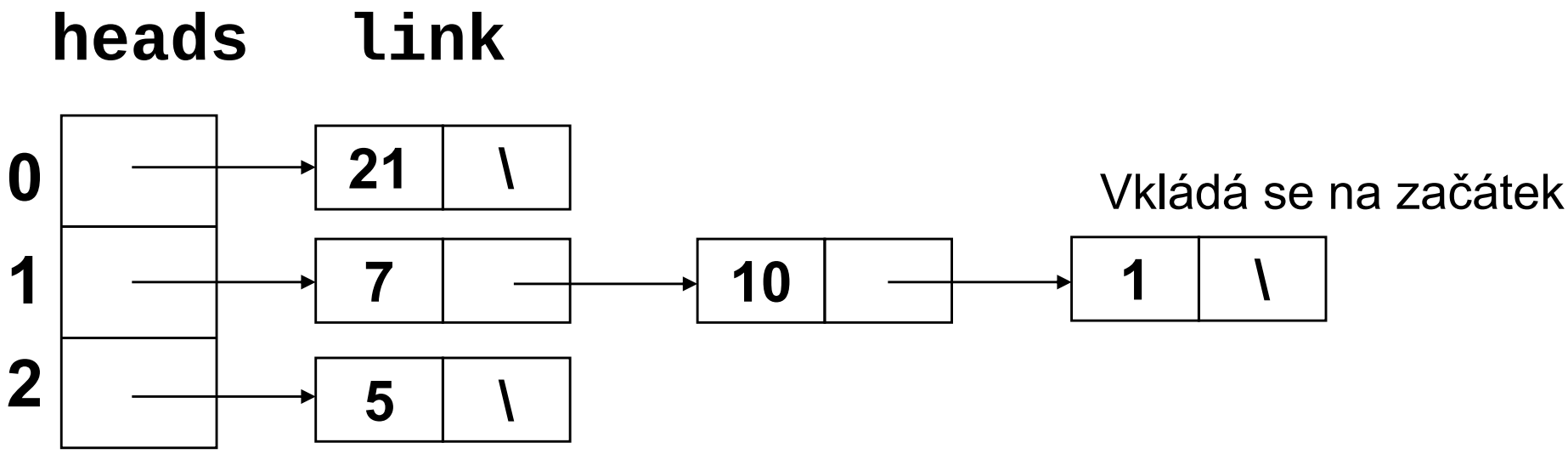
- počítá adresu z hodnoty klíče

2. Vyřešení kolizí

a) Zřetězené rozptylování 1/5
Chaining

$h(k) = k \bmod 3$

posloupnost : 1, 5, 21, 10, 7



seznamy synonym

a) Zřetězené rozptylování 2/5

```
private:
  link* heads; int N,M;  [Sedgewick]

public:
  init( int maxN )          // initialization
  {
    N=0;                    // No.nodes
    M = maxN / 5;           // table size
    heads = new link[M]; // table with pointers
    for( int i = 0; i < M; i++ )
       heads[i] = null;
  }
  ...
```

a) Zřetězené rozptylování 3/5

```
Item search( Key k )
{
  return searchList( heads[hash(k, M)], k );
}

void insert( Item item )                    // Vkládá se na začátek
{
  int i = hash( item.key(), M );
  heads[i] = new node( item, heads[i] );
  N++;
}
```

a) Zřetězené rozptylování 4/5

Řetěz synonym má ideálně délku $\alpha = n/m$, $\alpha > 1$ (plnění tabulky)

(*n* = počet prvků, *m* = velikost tabulky, m<n)

velmi nepravděpodobný extrém

Insert	**$I(n) = t_{hash} + t_{link} = O(1)$**		
Search	**$Q(n) = t_{hash} + t_{search}$**		**průměrně**
	$= t_{hash} + t_c * n/(2m)$	**$= O(n)$**	**$O(1 + \alpha)$**
Delete	**$D(n) = t_{hash} + t_{search} + t_{link}$**	**$= O(n)$**	**$O(1 + \alpha)$**

pro malá α (velká *m*) se hodně blíží O(1) !!!

pro velká α (malá *m*) *m*-násobné zrychlení x seq. s.

a) Zřetězené rozptylování 5/5

Praxe: volit *m* = *n*/5 až *n*/10 => plnění α = 10 prvků / řetěz

- vyplatí se hledání sekvenčně
- neplýtvá nepoužitými ukazateli

Shrnutí:

\+ nemusíme znát *n* předem

– potřebuje dynamické přidělování paměti

– potřebuje paměť na ukazatele a na tabulku[*m*]

b) Otevřené rozptylování (open-address hashing)

Znám předem počet prvků (odhad)

nechci ukazatele (v prvcích ani tabulku)

=> posloupnost do pole

Podle tvaru hashovací funkce $h(k)$ při kolizi

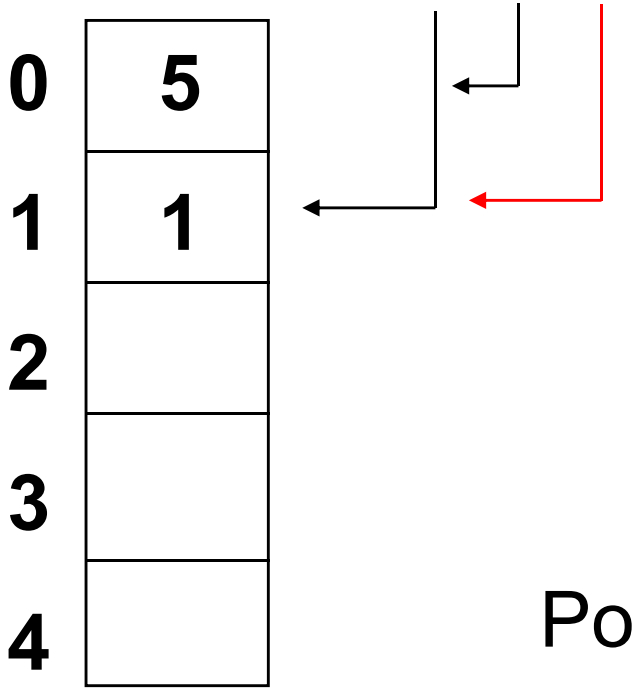
1. lineární prohledávání (linear probing)
2. dvojí rozptylování (double hashing)

0	**5**
1	**1**
2	**21**
3	**10**
4	

b) Otevřené rozptylování

$h(k) = k \bmod 5$ ($h(k) = k \bmod m$, m je rozměr pole)

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



Problém:

kolize - 1 blokuje místo pro 21

1. linear probing
2. double hashing

Pozn.: 1 a 21 jsou synonyma

často ale blokuje nesynonymum.

Kolize je blokování libovolným klíčem

Test - Probe

= určení, zda pozice v tabulce obsahuje klíč shodný s hledaným klíčem

- search hit = klíč nalezen
- search miss = pozice prázdná, klíč nenalezen
- Jinak = na pozici je jiný klíč, hledej dál

b) Otevřené rozptylování
(open-addressing hashing)

Metoda řešení kolizí
(solution of collisions)

b1) Linear probing

Lineární prohledávání

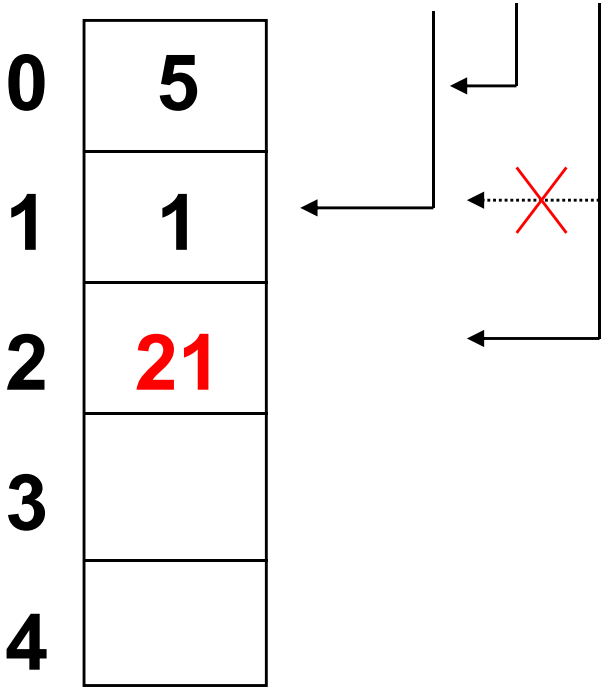
b2) Double hashing

Dvojí rozptylování

b1) Linear probing

$h(k) = [(k \bmod 5) + i\ ] \bmod 5 = (k + i) \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



kolize - 1 blokuje

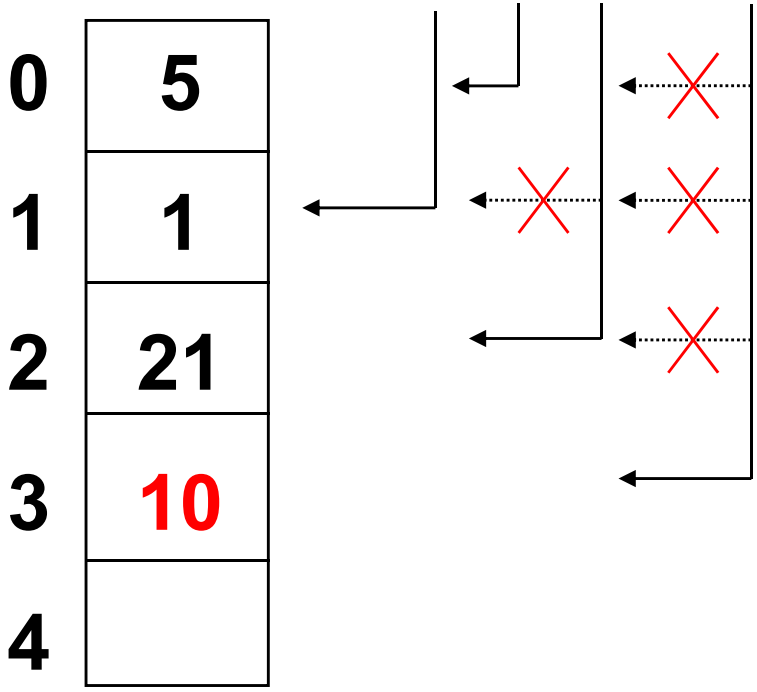
=> 1. linear probing

vlož o 1 pozici dál (i++ => i = 1)

b1) Linear probing

$h(k)$ = (k + i) mod 5

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



1. kolize - 5 blokuje - vlož dál

2. kolize - 1 blokuje - vlož dál

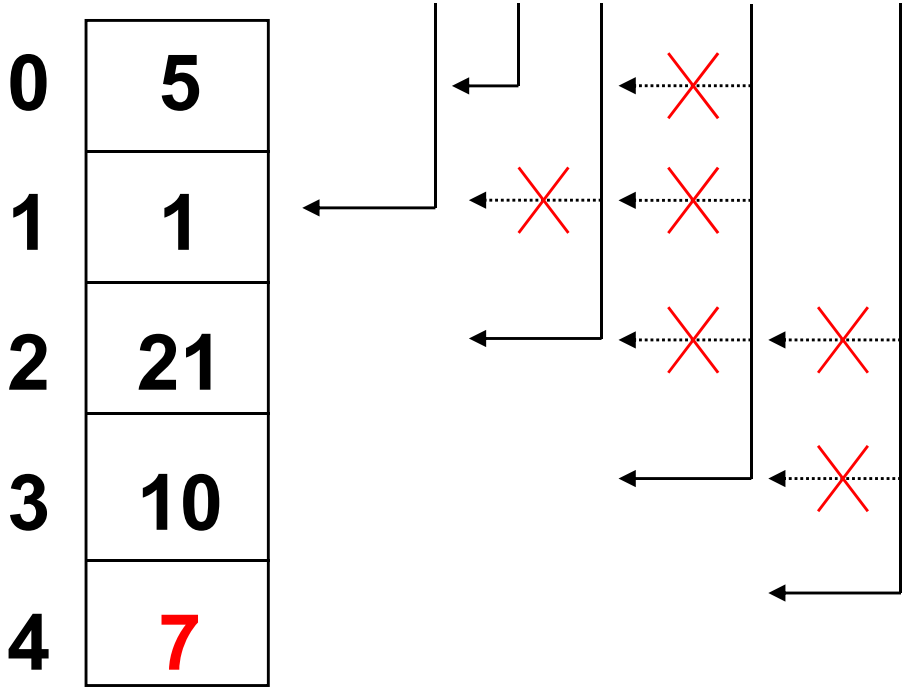
3. kolize - 21 blokuje - vlož dál

vloženo o 3 pozice dál (i = 3)

b1) Linear probing

$h(k) = (k + i) \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



1. kolize - vlož dál (i++)

2. kolize - vlož dál (i++)

vlož o 2 pozice dál (i = 2)

b1) Linear probing

$h(k)$ = (k + i) mod 5

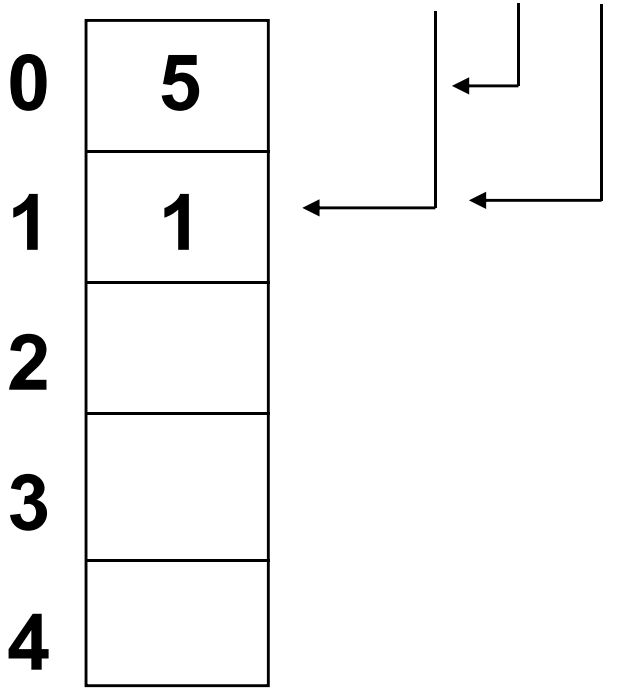
posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

0	**5**	i = 0
1	**1**	i = 0
2	**21**	i = 1
3	**10**	i = 3
4	**7**	i = 2

b1) Linear probing

$h(k) = k \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



kolize - 1 blokuje (collision-blocks)

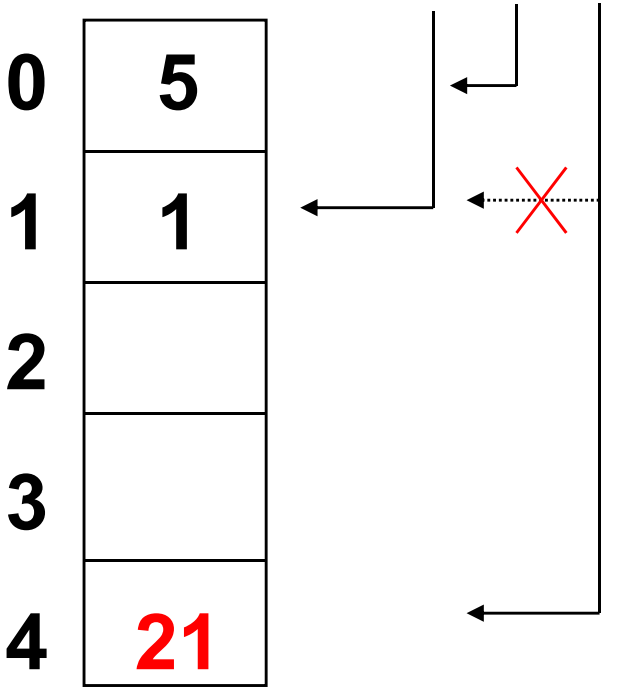
=> 2. double hashing

b1) Linear probing

$h(k) = [(k \bmod 5) + \text{i.const}\ ] \bmod 5$, $h(k) = (k + i.3) \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

stačí prvočíslo ≠ m
nebo číslo nesoudělné s m



kolize - 1 blokuje

(collision blocks)

=> 2. double hashing

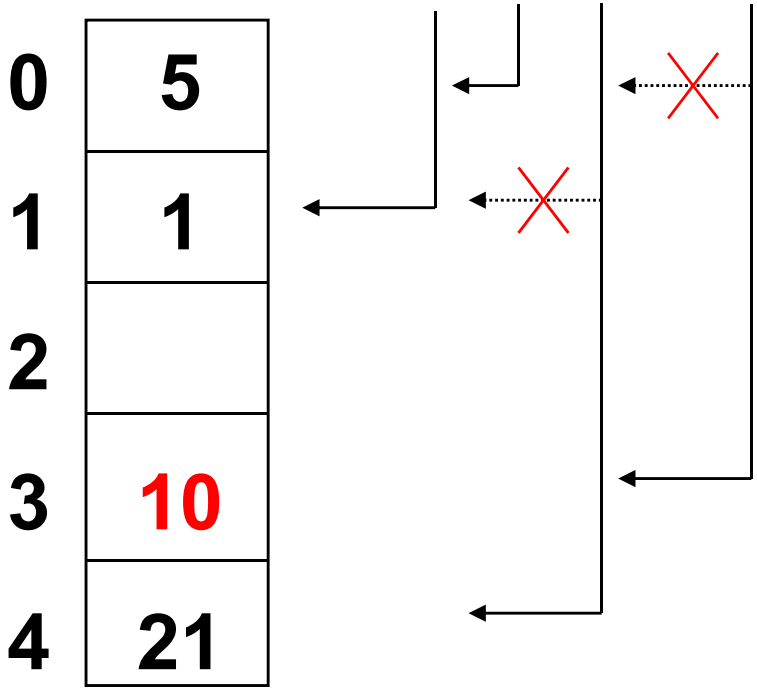
vlož o 3 pozice dál (i++ => i = 1)

(i je číslo pokusu)

b1) Linear probing

$h(k)$ = (k + i.3) mod 5

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



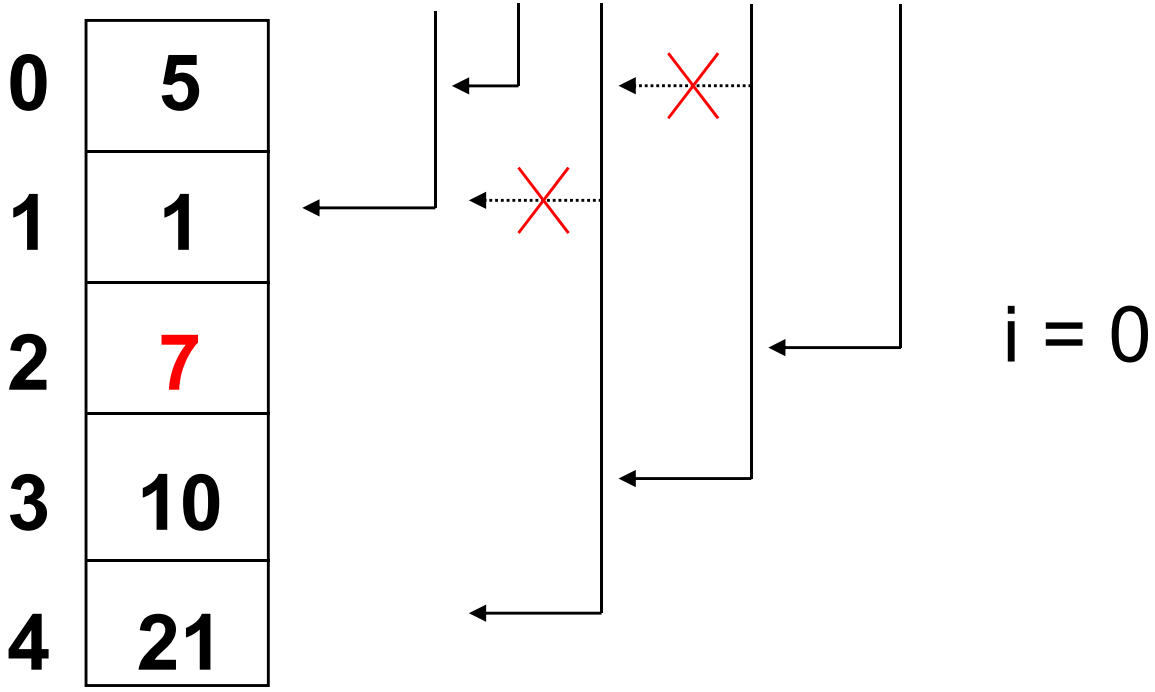
kolize - 5 blokuje - vlož dál

(vlož o 3 pozice dál (i = 1)

b1) Linear probing

$h(k)$ = (k + i.3) mod 5

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



i = 0

b1) Linear probing

$h(k)$ = (k + i.3) mod 5

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

0	**5**	i = 0
1	**1**	i = 0
2	**7**	i = 0
3	**10**	i = 1
4	**21**	i = 1

b1) Linear probing

$h(k) = (k + i) \bmod 5$

0	**5**	i = 0
1	**1**	i = 0
2	**21**	i = 1
3	**10**	i = 3 !
4	**7**	i = 2

hrozí dlouhé shluky
(long clusters)

$h(k) = (k + i.3) \bmod 5$

0	**5**	i = 0
1	**1**	i = 0
2	**7**	i = 0
3	**10**	i = 1
4	**21**	i = 1

vhodná volba posunu
i·3 je věcí náhody

b1) Linear probing

```
private:
  Item *st; int N,M;  [Sedgewick]
  Item nullItem;
public:
  init( int maxN )        // initialization
  {
    N=0;                  // Number of stored items
    M = 2*maxN;           // load_factor < 1/2
    st = new Item[M];
    for( int i = 0; i < M; i++ )
       st[i] = nullItem;
  }...
```

b1) Linear probing

```
void insert( Item item )
{
  int i = hash( item.key(), M );

  while( !st[i].null() )
      i = (i+const) % M; // Linear probing

  st[i] = item;
  N++;
}
```

b1) Linear probing

```
Item search( Key k )
{
  int i = hash( k, M );

  while( !st[i].null() ) { // !cluster end
                           // zarážka (sentinel)
     if( k == st[i].key() )
          return st[i];
     else
          i = (i+const) % M; // Linear probing
    }
     return nullItem;
}
```

b) Otevřené rozptylování
(open-addressing hashing)

Metoda řešení kolizí
(solution of collisions)

b1) Linear probing

Lineární prohledávání

b2) Double hashing

Dvojí rozptylování

b2) Double hashing

Hash function $h(k) = [h_1(k) + i.h_2(k)\ ] \bmod m$

$h_1(k) = k \bmod m$ // initial position

$h_2(k) = 1 + (k \bmod m')$ // offset

} Both depend on k => Each key has different probe sequence

m = prime number or m = power of 2

m' = slightly less m' = odd

If d = greatest common divisor => search 1/d slots only

Ex: k = 123456, m = 701, m' = 700

$h_1(k) = 80$, $h_2(k) = 257$ Starts at 80, and every 257 % 701

b2) Double hashing

```
void insert( Item item )
{
  Key k = item.key();
  int i = hash( k, M ),
      j = hashTwo( k, M );// different for k1 != k2

  while( !st[i].null() )
     i = (i+j) % M; //Double Hashing

  st[i] = item; N++;
}
```

b2) Double hashing

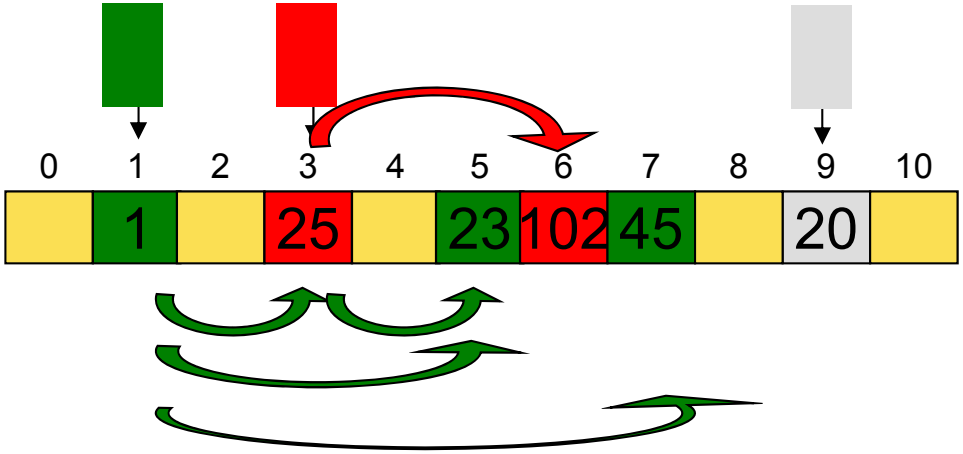
```
Item search( Key k )
{
  int i = hash( k, M ),
      j = hashTwo( k, M );// different for k1 != k2

  while( !st[i].null() )
  {
     if( k == st[i].key() )
          return st[i];
     else
          i = (i+j) % M; // Double Hashing
   }
   return nullItem;
}
```

Double hashing - example

b2) Double hashing $h(k) = [h_1(k) + i.h_2(k)] \bmod m$

Input	$h_1(k)$= k %11	$h_2(k)$= 1+k %10	i	$h(k)$
1	1	2	0	1
25	3	6	0	3
23	1	4	0,1	1,5
45	1	6	0,1	1,7
102	3	3	0,1	3,6
20	9	1	0	9



$h_1(k) = k \% 11$

$h_2(k) = 1 + (k \% 10)$

b) Otevřené rozptylování (open-addressing hashing)

α = plnění tabulky (*load factor of the table*)

$\alpha = n/m$, $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$

***n* = počet prvků (*number of items in the table*)**

***m* = velikost tabulky, m>n (*table size*)**

b) Otevřené rozptylování (open-addressing hashing)

Average number of probes [Sedgewick]

Linear probing:

Search hits	**$0.5 (1 + 1 / (1 - \alpha))$**	**found**
Search misses	**$0.5 (1 + 1 / (1 - \alpha)^2)$**	**not found**

Double hashing:

Search hits	**$(1 / \alpha) \ln (1 / (1 - \alpha)) + (1 / \alpha)$**
Search misses	**$1 / (1 - \alpha)$**

$\alpha = n/m$, $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$

b) Očekávaný počet testů

Linear probing:

Plnění α	1/2	2/3	3/4	9/10
Search hit	1.5	2.0	3.0	5.5
Search miss	2.5	5.0	8.5	55.5

Double hashing:

Plnění α	1/2	2/3	3/4	9/10
Search hit	1.4	1.6	1.8	2.6
Search miss	1.5	2.0	3.0	5.5

Tabulka může být více zaplněná než začne klesat výkonnost.

K dosažení stejného výkonu stačí menší tabulka.

References

[Cormen]

Cormen, Leiserson, Rivest: Introduction to Algorithms, Chapter 12, McGraw Hill, 1990

or better:

[CLRS]

Cormen, Leiserson, Rivest, Stein: Introduction to Algorithms, third edition, Chapter 11, MIT press, 2009