

Příklad 1/23



Pro rostoucí spojitě fukce $f(x)$, $g(x)$ platí $f(x) \in \Omega(g(x))$.
Z toho plyne, že:

- a) $f(x) \in O(g(x))$
- b) $f(x) \in \Theta(g(x))$
- c) $g(x) \in \Theta(f(x))$
- d) $g(x) \in \Omega(f(x))$
- e) $g(x) \in O(f(x))$

Příklad 2/23



Pro rostoucí spojitě fukce $f(x)$, $g(x)$ platí $f(x) \in O(g(x))$.
Z toho plyne, že:

- a) $f(x) \in \Theta(g(x))$
- b) $f(x) \in \Omega(g(x))$
- c) $g(x) \in \Theta(f(x))$
- d) $g(x) \in \Omega(f(x))$
- e) $g(x) \in O(f(x))$

Příklad 3/23



Pokud funkce f roste asymptoticky rychleji než funkce g (tj. $f(x) \notin O(g(x))$), platí následující tvrzení:

- a) jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak $f(x) > g(x)$
- b) rozdíl $f(x) - g(x)$ je vždy kladný
- c) rozdíl $f(x) - g(x)$ je kladný pro každé $x > y$,
kde y je nějaké dostatečně velké číslo
- d) obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty
- e) nic z předchozího

Příklad 4/23



Pokud funkce f roste asymptoticky stejně rychle jako funkce g (tj. $f(x) \in \Theta(g(x))$), platí právě jedno následující tvrzení. Které?

- a) jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak $f(x) = g(x)$
- b) ani poměr $f(x)/g(x)$ ani poměr $g(x)/f(x)$ nekonverguje k nule s rostoucím x
- c) rozdíl $f(x) - g(x)$ je kladný pro každé $x > y$, kde y je nějaké dostatečně velké číslo
- d) obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty
- e) nic z předchozího

Příklad 5/23



Pro dvě spojitě funkce $f(x)$ a $g(x)$ rostoucí na celém \mathbf{R} platí $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \mathbf{R}$. To znamená:

- a) $f(x) \notin \Omega(g(x))$
- b) $f(x) \notin O(g(x))$
- c) je možné, že $f(x) \in \Omega(g(x))$
- d) $g(x) \notin \Theta(f(x))$
- e) $f(x)$ roste asymptoticky pomaleji než $g(x)$

Příklad 6/23



Pro dvě spojitě rostoucí funkce $f(x)$ a $g(x)$ rostoucí na celém \mathbf{R} platí $f(x) \notin \Omega(g(x))$, $f(x) \notin \Theta(g(x))$. Tudíž:

a) $g(x) \in O(f(x))$

b) $g(x) \in \Theta(f(x))$

c) $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \mathbf{R}$

d) $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \mathbf{R}$

e) může existovat $y \in \mathbf{R}$ takové, že $f(y) > g(y)$

Příklad 7/23



Algoritmus A probírá postupně všechny prvky v dvourozměrném poli o velikosti $n \times n$ a s každým prvkem provádí další (nám neznámou) akci, jejíž složitost je $\Theta(\log_2(n))$. Celková asymptotická složitost algoritmu A je tedy:

- a) $\Theta(n \cdot \log_2(n))$
- b) $\Theta(n^2)$
- c) $\Theta(n^3)$
- d) $\Theta(n^2 + \log_2(n))$
- e) $\Theta(n^2 \cdot \log_2(n))$

Příklad 8/23



Právě jeden z následujících výroků je nepravdivý. Označte jej.

a) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2 - x)$

b) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2 - \log_2(x))$

c) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x^2 - \log_2(x))$

d) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x + \log_2(x))$

e) $x \cdot \log_2(x) \in \Theta(x \cdot \log_2(x^2))$

Příklad 9/23



Algoritmus A provede jeden průchod polem s n prvky. Při zpracování prvku na pozici k provede $k+n$ operací. Operační (=asymptotická) složitost algoritmu A je tedy:

- a) $\Theta(k+n)$
- b) $\Theta((k+n) \cdot n)$
- c) $\Theta(k^2+n)$
- d) $\Theta(n^2)$
- e) $\Theta(n^3)$

Příklad 10/23



V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (.....) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.

a) $x^2 \cdot 2^x \in \dots\dots\dots((\ln(x^2))^2 + 2^x)$

b) $(\ln(x^2))^2 + 2^x \in \dots\dots\dots(x^2 + \ln(x^2))$

c) $2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \notin \dots\dots\dots(2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1})$

Příklad 11/23



V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (.....) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.

a) $x^2 \cdot \ln(x^2) \in \dots\dots\dots(x^2 + \ln(x))$

b) $x^3 + \ln(x^2) \in \dots\dots\dots(x^3 + 2^x)$

c) $x^3 \cdot \ln(x^2) \notin \dots\dots\dots(\ln(x^2) + 2^x)$

Příklad 12/23



Uved'te příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$, pro které současně platí všechny tři následující vztahy:

$$f(x) \notin O(g(x)), \quad g(x) \notin \Theta(h(x)), \quad h(x) \notin \Omega(f(x))$$

Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.

Příklad 13/23



Uved'te příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$, pro které současně platí všechny tři následující vztahy:

$$f(x) \notin O(g(x)), \quad g(x) \notin \Omega(h(x)), \quad h(x) \notin \Theta(f(x))$$

Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.

Příklad 14/23



Matrice A má M řádků a N sloupců indexovaných od 0. Na zpracování prvku matice na pozici $[r][s]$ ($0 \leq r < M$, $0 \leq s < N$) je zapotřebí právě s operací, z nichž každá má konstantní složitost. Jaká je asymptotická složitost zpracování celé matice?

Příklad 15/23



Matrice A má M řádků a N sloupců indexovaných od 0. Na zpracování prvku matice na pozici $[r][s]$ ($0 \leq r < M, 0 \leq s < N$) je zapotřebí právě $s+r$ operací, z nichž každá má konstantní složitost. Jaká je asymptotická složitost zpracování celé matice?

Využijte vztah:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Příklad 16/23



Uvažte algoritmus násobení dvou celých čísel, tak jak je znám ze školy pro ruční násobení. Předpokládejte, že sečtení nebo vynásobení dvou *číslic* má konstantní časovou složitost.

Určete asymptotickou složitost vynásobení dvou celých čísel M , N zapsaných v desítkové soustavě.

Příklad násobení

$M = 9803$

$N = 347$

```
      9803
      x 347
      -----
      68621
      39212
      29409
      -----
      3401641
```


Příklad 17/23



Určete asymptotickou složitost daného kódu v závislosti na N .

```
//a = array[0..N-1] of int;  
for(i = 0; i < N; i++)  
    a[i] = N;  
for (i = 0; i < N; i++)  
    while (a[i] > 0) {  
        print(a[i]);  
        a[i] = a[i]/2;    // integer division  
    }
```

Příklad 18/23



Určete asymptotickou složitost daného kódu v závislosti na N .

```
//a = array[0..N-1] of int;  
for(i = 0; i < N; i++)  
    a[i] = i;  
for (i = 0; i < N; i++)  
    while (a[i] > 0) {  
        print(a[i]);  
        a[i] = a[i]/2;    // integer division  
    }
```

Příklad 19/23



Určete asymptotickou složitost daného kódu v závislosti na N .

```
//a = array[0..N-1] of int;
for(i = 0; i < N; i++)
    a[i] = 1;
for (i = 1; i < N; i++)
    while (a[i] <= 2*a[i-1]) {
        print(a[i]);
        a[i] = a[i]+1;
    }
```



- A. Jaká je asymptotická složitost vynásobení dvou matic o velikosti $N \times N$?
- B. Jaká je asymptotická složitost Gaussova eliminačního algoritmu pro soustavu N rovnic o N neznámých?
- C. Jaká je asymptotická složitost výpočtu determinantu matice velikosti $N \times N$ přímo z definice determinantu?
Lze determinant vypočítat efektivněji, s nižší asymptotickou složitostí? Jak?
- D. Jaká je asymptotická složitost výpočtu řešení soustavy N lineárních rovnic s N neznámými pomocí Cramerova pravidla?



Na obvodu kružnice jsou v libovolně nepravidelných intervalech vyznačeny body očíslované po řadě za sebou $1, 2, \dots, N$. Máme určit počet všech takových trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v očíslovaných bodech a které neobsahují střed kružnice jako svůj vnitřní bod.

Navrhněte algoritmus a určete jeho asymptotickou složitost.

Řešte analogickou úlohu pro konvexní čtyřúhelníky.

Příklad 22/23



Na výstup máme vypsát všechna kladná celá čísla, která jsou menší než dané číslo N a která ve svém binárním zápisu obsahují právě 3 jedničky.

Jaký bude asymptotická složitost efektivního algoritmu?
Algoritmus lineární vůči N je neefektivní.



Popište, jak vypočtete hodnotu

$$\log(\log(N^{(N!)}))$$

pro $N = 10^7$.

Jak dlouho bude trvat výpočet na Vašem osobním počítači?
Logaritmus je o základu 10.

Nepoužívejte aproximace jako např. Stirlingův vzorec apod.