ALG 14

Hledání k-tého nejmenšího prvku

- Randomized select
- CLRS varianta Partition v Quicksortu
- Select metodou medián z mediánů

Hledání k-tého nejmenšího prvku

1. Seřaď seznam/pole a vyber k-tý nejmenší, složitost $\Theta(N*\log(N))$.
Nevýhodou je zbytečné řazení úplně všech dat.

2. Využij Randomized select založený na principu Quick sortu. Očekávaná složitost $\Theta(N)$, nejhorší možná $\Theta(N^2)$.

3. Využij Select založený na principu Quick sortu s výběrem pivota metodou medián z mediánů. Zaručená složitost $\Theta(N)$, velká režie - vhodná jen pro velká data.

Randomized select

Partition -- dělení na "malé" a "velké" v Quicksortu.

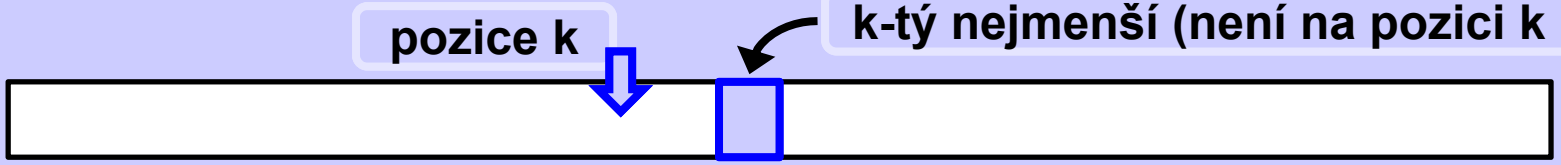
Randomized partition

-- Vyber prvek na náhodné pozici pole/úseku jako pivot.
-- Proveď partition jako v Quicksortu s vybraným pivotem.

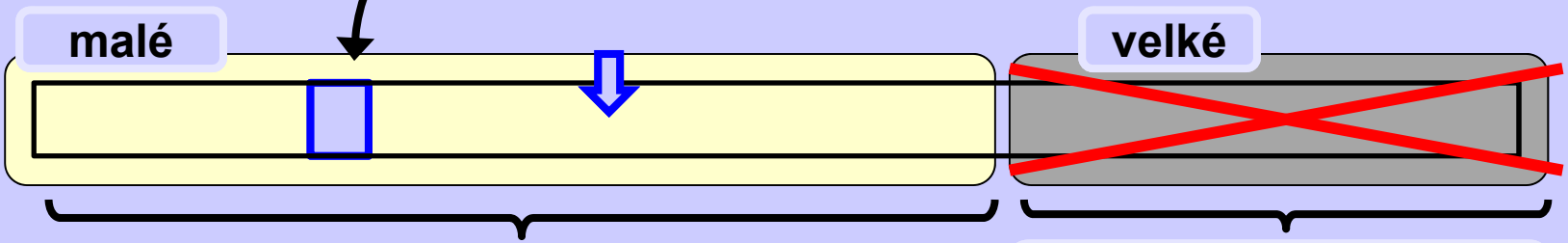
Randomized select (k-tý nejmenší prvek)

-- Když je délka úseku rovna 1, vrať jeho jediný prvek.
-- Proveď Randomized partition tohoto úseku, vznikne levý a pravý podúsek.
-- Aplikuj Randomized select rekurzivně buď na levý nebo pravý podúsek, podle toho, v kterém z nich může ležet k-tý nejmenší prvek celého pole.

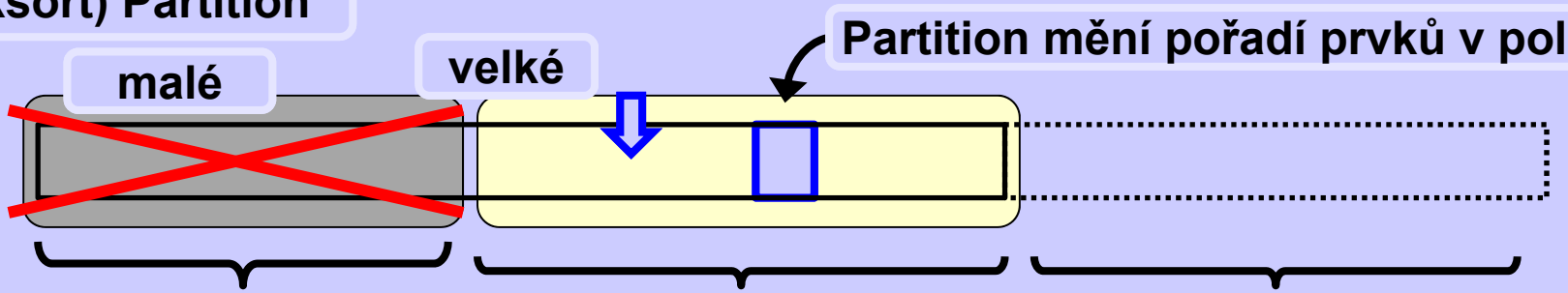
Randomized select



(Quicksort) Partition

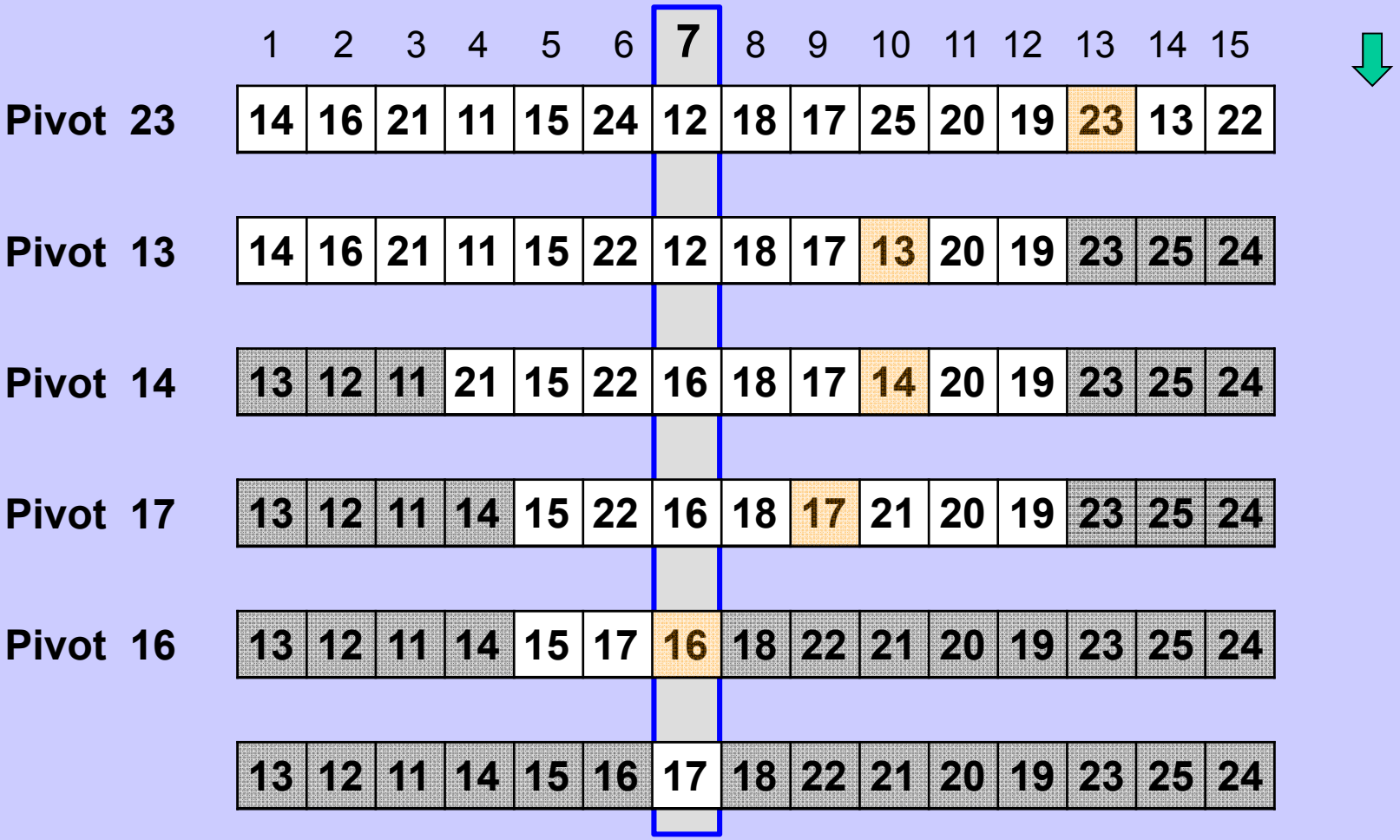


(Quicksort) Partition



Randomized select

Příklad -- hledání 7 nejmenšího prvku



Randomized select

Dělení úseku pole od indexu L, až po index R včetně
na "malé" a "velké"hodnoty podle předem zvolené pivotní hodnoty.

Analogicky jako v Quick sortu.

```
// returns index of the first element in the "big" part
int partition( int [] a, int L, int R, int pivot) {
  int iL = L, iR = R;
  do {
    while (a[iL] < pivot) iL++;
    while (a[iR] > pivot) iR--;
    if (iL < iR)
      swap(a, iL++, iR--);
  } while(iL < iR);

  // if necessary move right by 1
  if ((a[iL] < pivot) || (iL == L) iL++;
  return iL;
}
```

Randomized select

```
int quickselect(int [] a, int iL, int iR, int k) {
  if (iL == iR) return a[iL];          // all done, found

  int pivot = a[randomInt(L, R)];      // random pivot
  int iMidR = partition(a, L, R, pivot);

  // recursively process only the part in which
  // the k-th element surely is present
  if (k < iMidR)
    return quickselect(a, iL, iMidR-1, k);
  else
    return quickselect(a, iMidR, iR, k);
}
```

Příklad volání

```
int k = ...; // whatever
int kth_element = quickselect(a, 0, a.length(), k);
```

Randomized select

Asymptotická složitost -- podobně jako u Quicksortu

Nevhodná volba pivota -- složitost může degenerovat až na $\Theta(n^2)$, pokud by se v každém kroku zmenšila délka zpracovávaného úseku jen o malou konstantu.
Náhodná volba pivota činí tuto možnost velmi nepravděpodobnou, prakticky nenastává.

Očekávaná složitost

Ve skoro každém kroku klesá délka zpracovávaného úseku úměrně konstantě $\lambda < 1$, délky úseků pak odpovídají hodnotám

$$N, N\lambda, N\lambda^2, N\lambda^3, \ldots,$$

celková délka všech úseků je pak menší než součet této řady

$$N/(1-\lambda) \in \Theta(N).$$

Alternativní metoda Partition

V literatuře (např. [CLRS] a na webu, např. Wikipedie) najdeme postup popsaný kódem níže. Je koncepčně jednoduchý, fakticky ale pomalejší, faktorem cca 2 až 3.

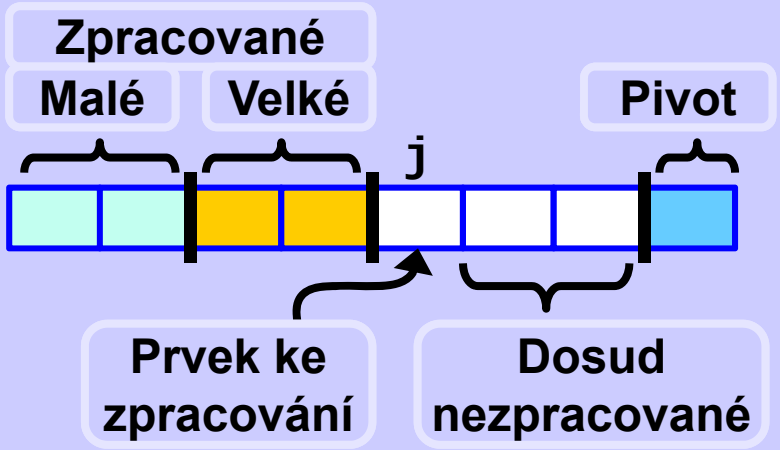
```
// returns index of the first element in the "big" part
int partitionCLRS(int [] a, int iL, int iR) {
  int pivot = a[iR];
  int iMid = iL-1;
  for (int j = iL; j < iR; j++ )
    if (a[j] <= pivot)
      swap(a, ++iMid, j);
  swap(a, ++iMid, R);
  return iMid;
}
```

Swapuje se každý prvek menší nebo roven než pivotu,
Očekáváme, že cca polovina prvků v úseku bude swapována.
V klasické variantě se swapuje mnohem méně.

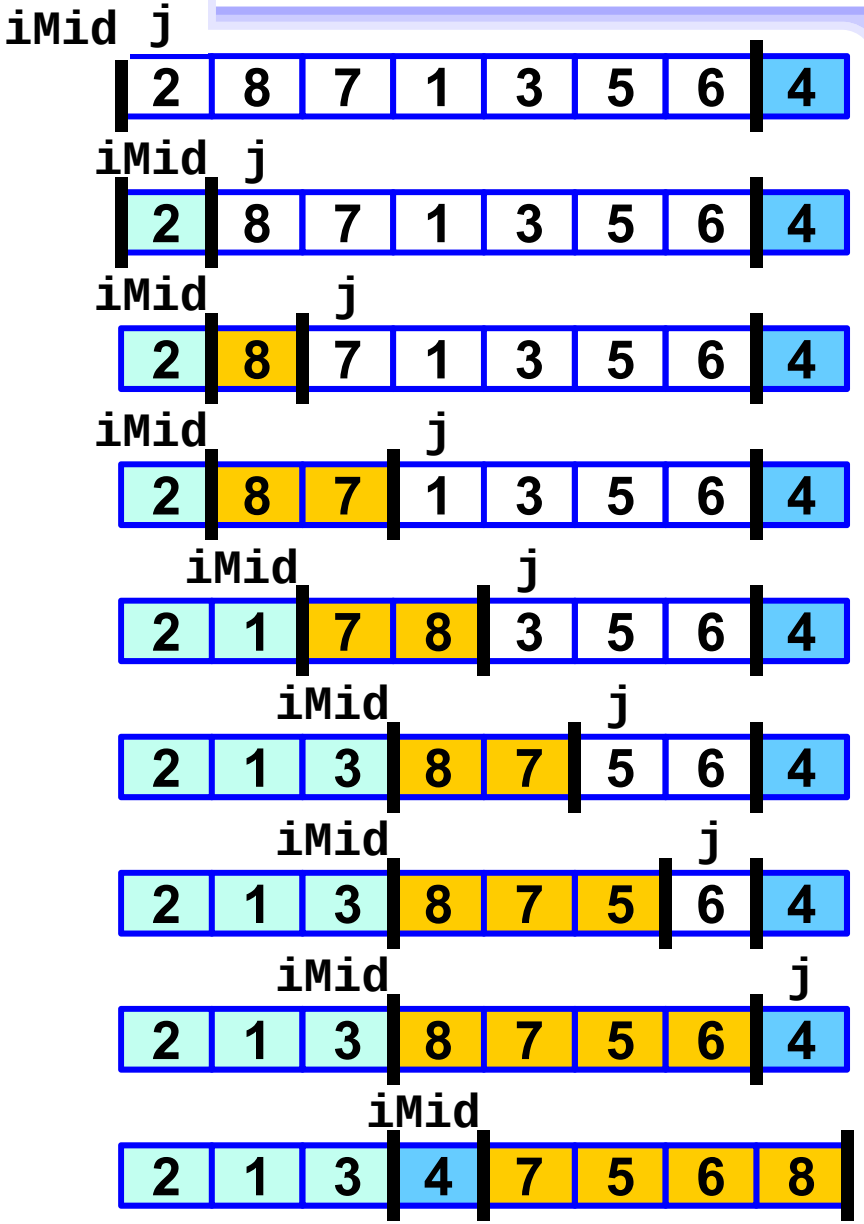
Alternativní metoda Partition

Ukázka průběhu

Postup zleva doprava




```
int pivot = a[iR];
int iMid = iL-1;
for(int j = iL; j < iR; j++)
  if (a[j] <= pivot)
    swap(a, ++iMid, j);
swap(a, ++iMid, R);
return iMid;
```



Select metodou medián z mediánů

Randomized Select se od Quicksortu liší hlavně tím, že nevolá rekurzi na úsek s "malými" a "velkými" hodnotami, ale jen na jeden z nich,
podle toho, v kterém z nich lze očekávat výskyt hledaného k-tého nejmenšího prvku.

Jak si pamatujeme z Quicksortu, pokud je úsek "malých" nebo "velkých" hodnot opakovaně extrémně krátký, může to vést až na kvadratickou složitost Quicksortu.

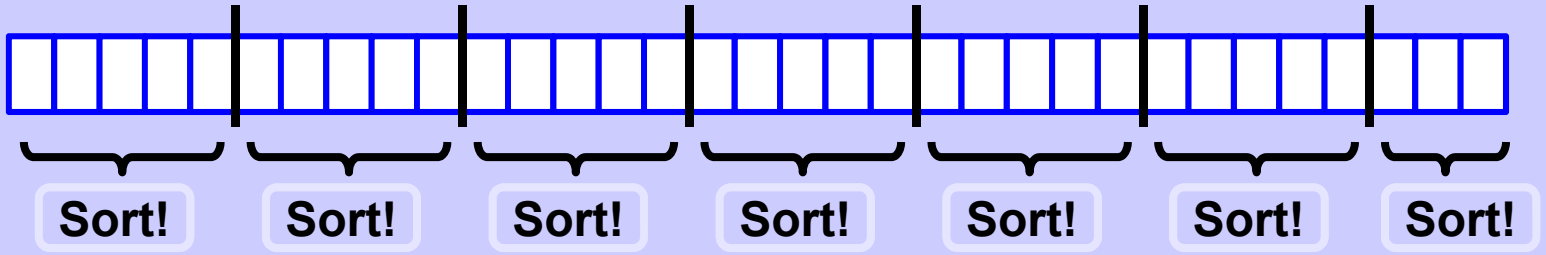
Stejná potíž by mohla nastat i metodě select.

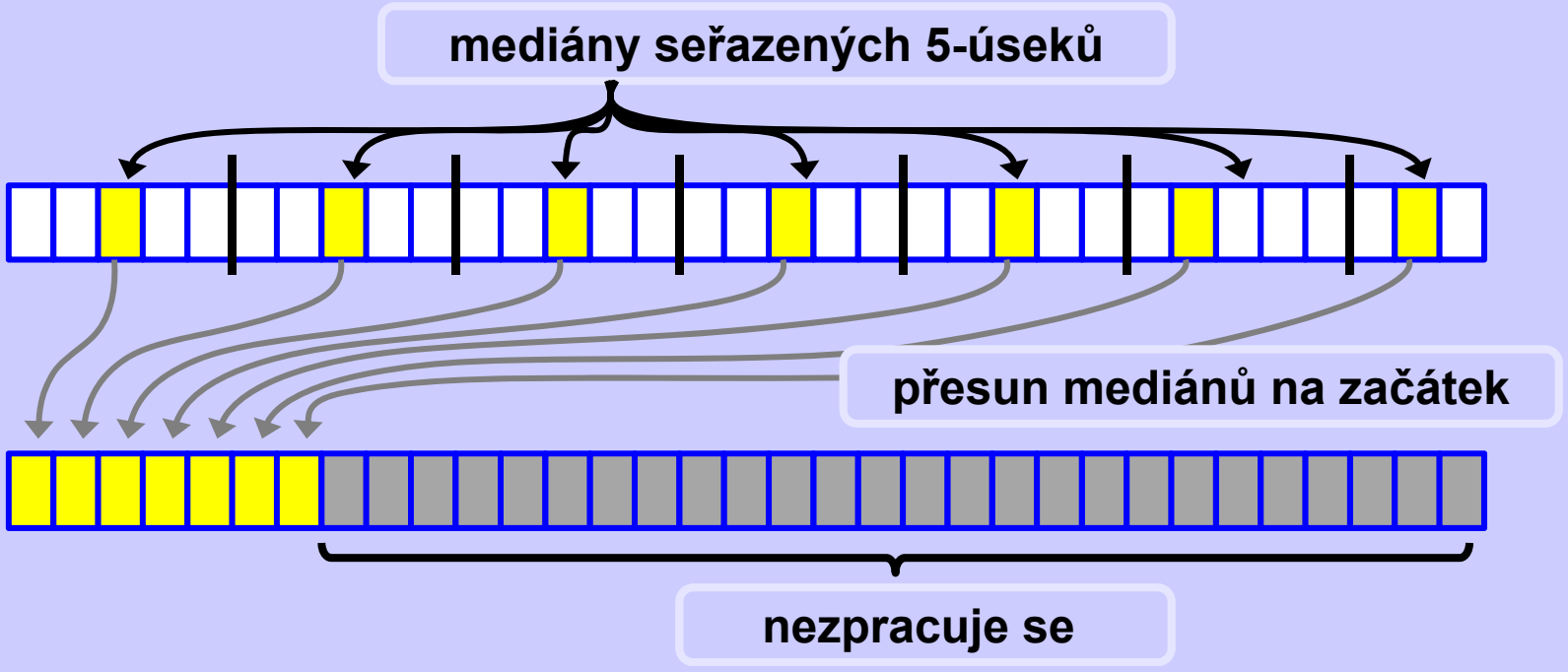
Je nutno zajistit, aby v metodě partition byl vybrán pokaždé dostatečně vhodný pivot, tj. takový, který dobře rozdělí daný úsek na "malé" a "velké", tj. takový, který je pokud možno co nejblíže mediánu hodnot tohoto úseku.

Select metodou medián z mediánů

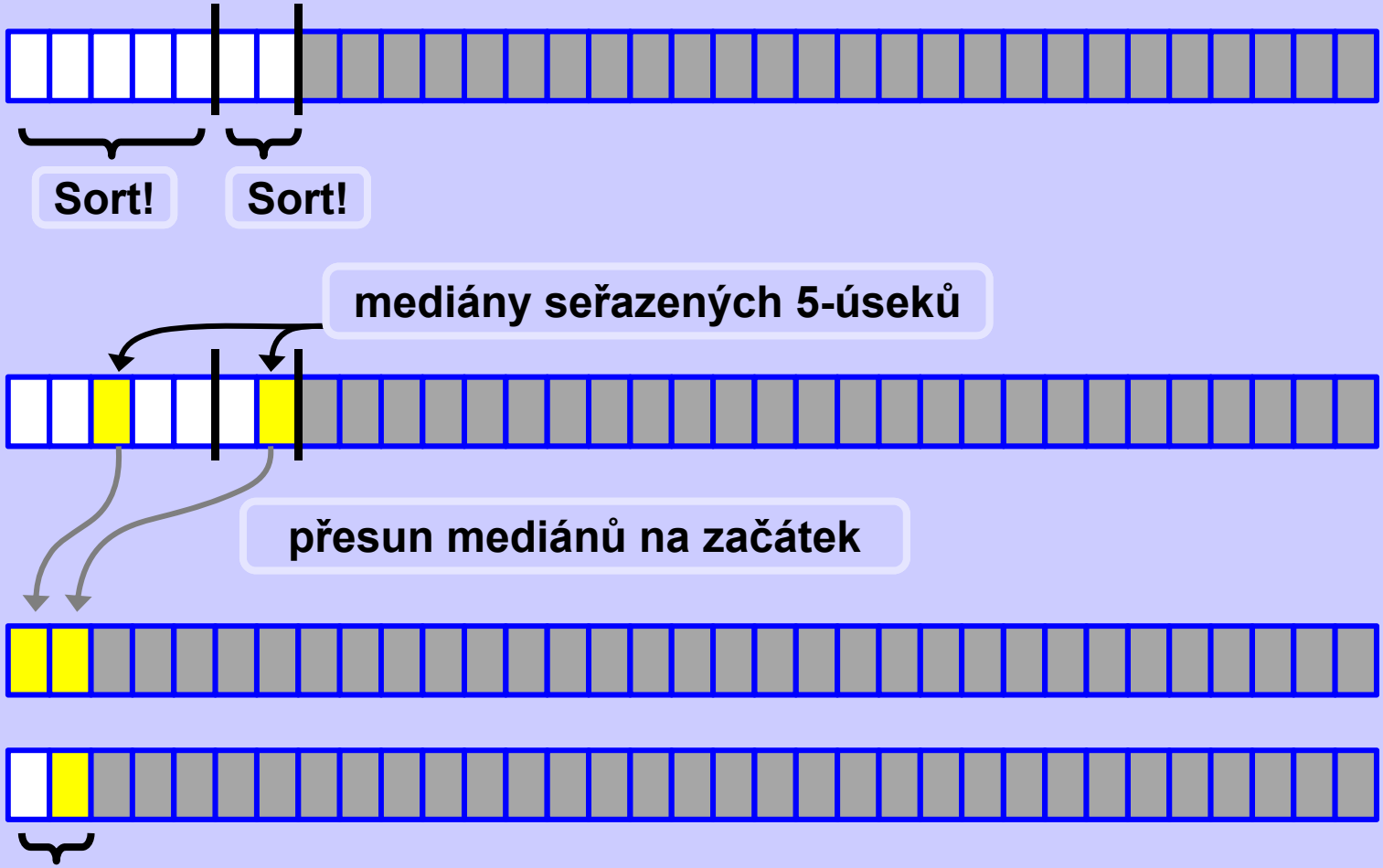
Volba pivota pro funkci Partition -- ukázka pro pole délky 39

Úseky délky 5





Select metodou medián z mediánů



Sort! a medián úseku.
Tento medián se použije jako pivot ve funkci Partition.

Select metodou medián z mediánů

0. Pokud má aktuální úsek pole délku 1, vrať jeho jediný prvek.

1. Rozděl pole nebo úsek pole délky N na $\lfloor N/5 \rfloor$ skupin po pěti prvcích a nejvýše jednu zbylou s méně než 5 prvky.

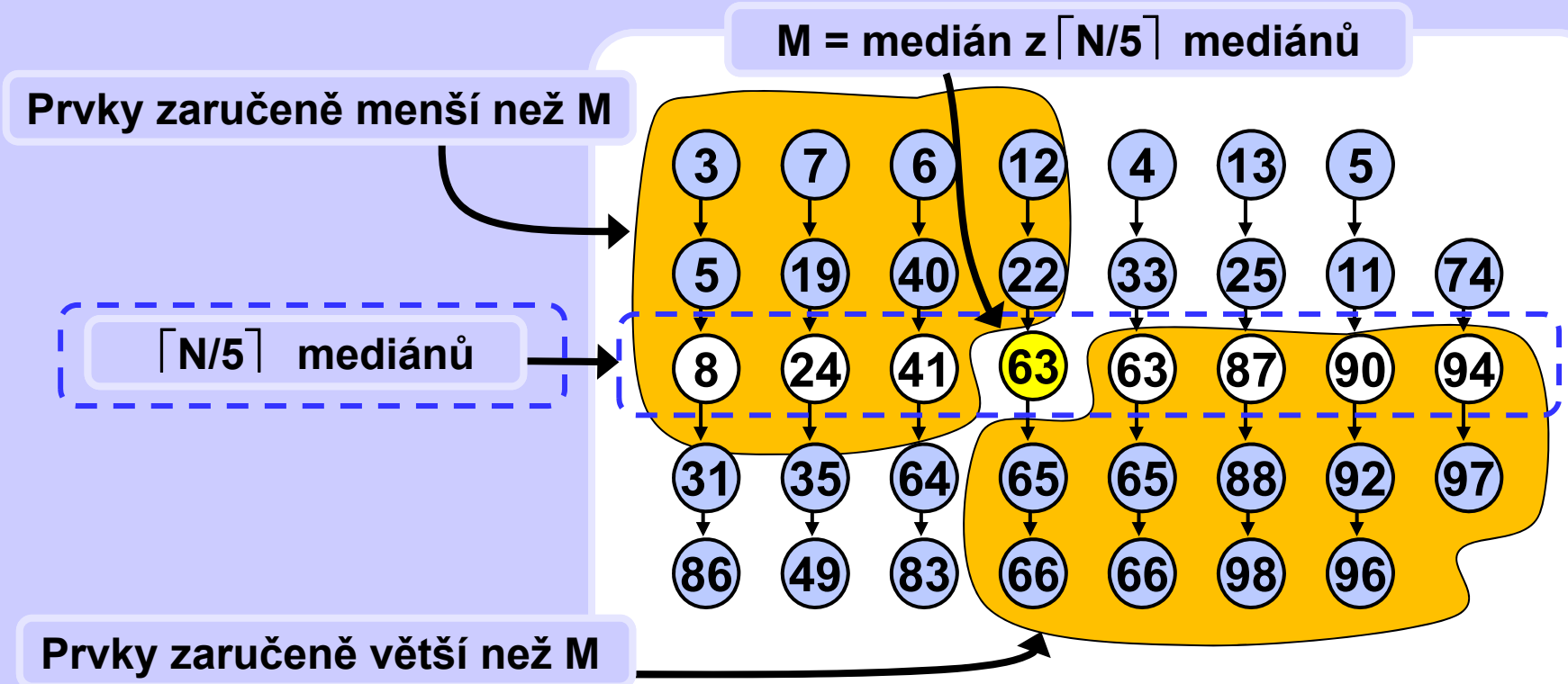
2. Každou skupinu seřaď (např. Insert sort) a vyber z ní její medián. Všechny tyto mediány přesuň na začátek pole/úseku.

3. Aplikuj 0. až 2. rekurzivně na úsek obsahující právě nalezené mediány, dokud nezískáš medián původních $\lceil N/5 \rceil$ mediánů z bodu 2. Tento medián M bude pivotem.

4. Rozděl pole/úsek na "malé" a "velké" pomocí metody partition s pivotem M.

5. Podle velikosti úseků "malých" a "velkých" rozhodni, v kterém z nich se nachází k-tý nejmenší prvek celého pole a na něj aplikuj rekurzivně postup počínaje bodem 0.

Select metodou medián z mediánů

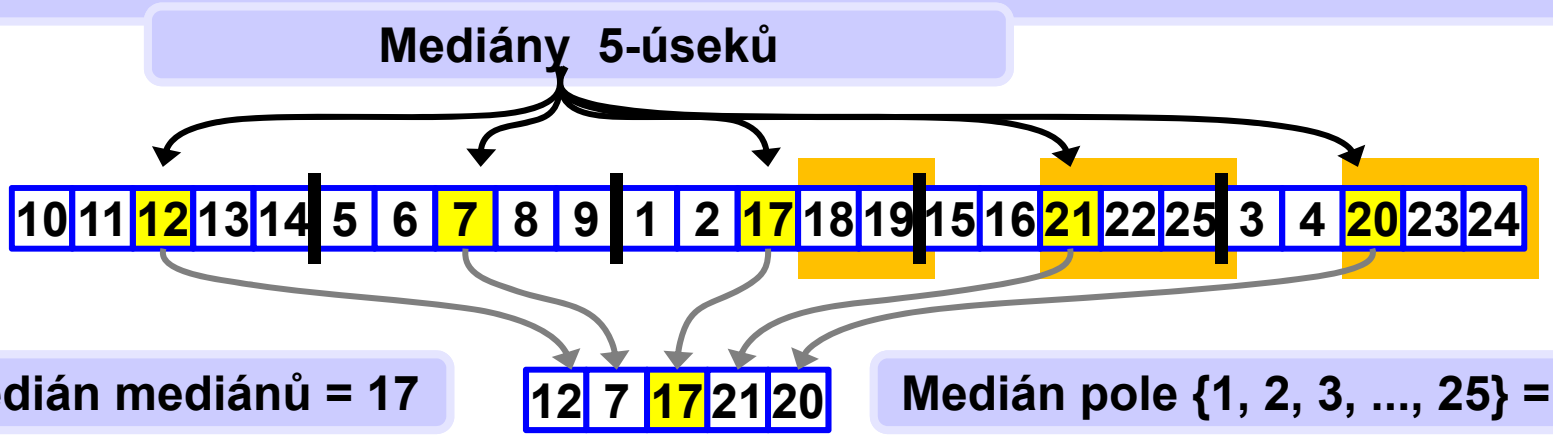


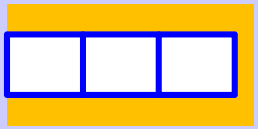
Prvků zaručeně větších než M je alespoň 3N/10–6.
Analogicky, prvků menších než M je také alespoň 3N/10–6.

V bodě 5 se rekurze zavolá na úsek obsahující nejvýše
N–(3N/10–6) = 7N/10+6 prvků. Je tak zaručeno, že v nejhorším případě se úsek zkrátí o alespoň cca 30%.

Select metodou medián z mediánů

Medián mediánů není obecně roven mediánu celého souboru, nemůže být ale ani příliš velký ani malý.



Zvýrazněné hodnoty  nemohou být menší než medián mediánů. Těchto hodnot je celkem 8. Analogické zjištění platí pro hodnoty menší než medián mediánů. Pro pole délky 25 s různými prvky je zaručeno, že vybraný pivot bude co do velikosti mezi 9. -- 17. prvkem včetně, tj. 16/25 = 64% nevýhodných voleb pivota odpadá.

Select metodou medián z mediánů

Metoda subSort je obyčejný Insert Sort,
rychlý na malých úsecích pole.
Zde slouží k nalezení mediánu hodnot v úseku délky 5 nebo menší.

```
void subSort(int [] a, int L, int R) {
  int insVal, j;
  for(int i = L+1; i <= R; i++) {
    insVal = a[i];
    j = i-1;
    while ((j >= L) && (a[j] > insVal)) {
      a[j+1] = a[j];
      j--;
    }
    a[j+1] = insVal;
  }
}
```

Select metodou medián z mediánů

Metoda select volá sama sebe dvakrát.
Poprvé pro nalezení mediánu z mediánů úseků délky 5,
podruhé pro hledání k-tého prvku celého pole
mezi buďto "malými nebo "velkými" hodnotami v aktuálním úseku.

```
int select(int [] a, int iL, int iR, int k) {
  // 0. if the group is short terminate the recursion

  // 1. move medians of groups of 5 to the left

  // 2. also the median of the last possibly smaller group

  // 3. find median M of medians of 5 recursively

  // 4. use M for partition

  // 5. recursively call select on the appropriate part

}
```

Select metodou medián z mediánů

```
int select(int [] a, int iL, int iR, int k) {

  // 0. if the group is short terminate the recursion
  if (iL == iR) return a[iL];
  if (iL+1 == iR) return (a[iL] < a[iR]) ? a[iL] : a[iR];

  // 1. move medians of groups of 5 to the left
  int lastM = iL;                    // place for medians
  int i5;                           // 5-elem groups index
  for (i5 = iL; i5 <= R-4; i5 += 5) {
    subSort(a, i5, i5+4);           // find median of 5
    swap(a, lastM++, i5+2);         // put it to the left
  }

  // 2. also the median of the last possibly smaller group
  if (i5 <= iR) {
    subSort(a, i5, iR);
    swap(a, lastM, i5+(iR-i5)/2); // lastM - last of medians
  }
  ...  // continue
```

Select metodou medián z mediánů

```
 ... // continued:

  // 3. find median (medmed5) of medians of 5 recursively
  int medmed5 = select(a, iL, lastM, iL+(lastM-iL)/2);

  // 4. use medmed5 for partition,
     a[iBig] = leftmost "big" value
  int iBig = partition(a, iL, iR, medmed5);

  // 5. recursively call select on the appropriate part
  if (iBig > k)
    // the k-th elem is among the "small"
    return select(a, iL, iBig-1, k);
  else
    // the k-th elem is among the "big"
    return select(a, iBig, iR, k);

} // end of select
```

Select metodou medián z mediánů

Odvození složitosti

Rekurence:

$$T(N) \le \begin{cases} O(1) & \text{pro } N < 140 \\ T(\lceil N/5 \rceil) + T(7N/10+6) + O(N) & \text{pro } N \ge 140 \end{cases}$$

bod 3 — $T(\lceil N/5 \rceil)$; **bod 5** — $T(7N/10+6)$; **body 1, 2, 4** — $O(N)$

Řešení substituční metodou, lze ukázat
$T(N) \le cN \in \Theta(N)$,
pro dostatečně velké c a pro N > 0.