ALG 11

Dynamické programování

Nejdelší rostoucí podposloupnost

Optimální pořadí násobení matic

Nejdelší rostoucí podposloupnost

Z dané posloupnosti vyberte co nejdelší rostoucí podposloupnost.

5 4 9 11 5 3 2 10 0 8 6 1 7

Řešení: 4 5 6 7

Jiné možné varianty

Vlastnosti hledané podposloupnosti:
Klesající, nerostoucí, neklesající, aritmetická,
s omezenou rychlostí růstu, s váhami prvků, ... atd., ...

zde neprobírané

Koncepční přístup I

Převeď na známou úlohu, definuj vhodný DAG podle daných vlastností podposloupnosti, v DAG hledej nejdelší cestu.

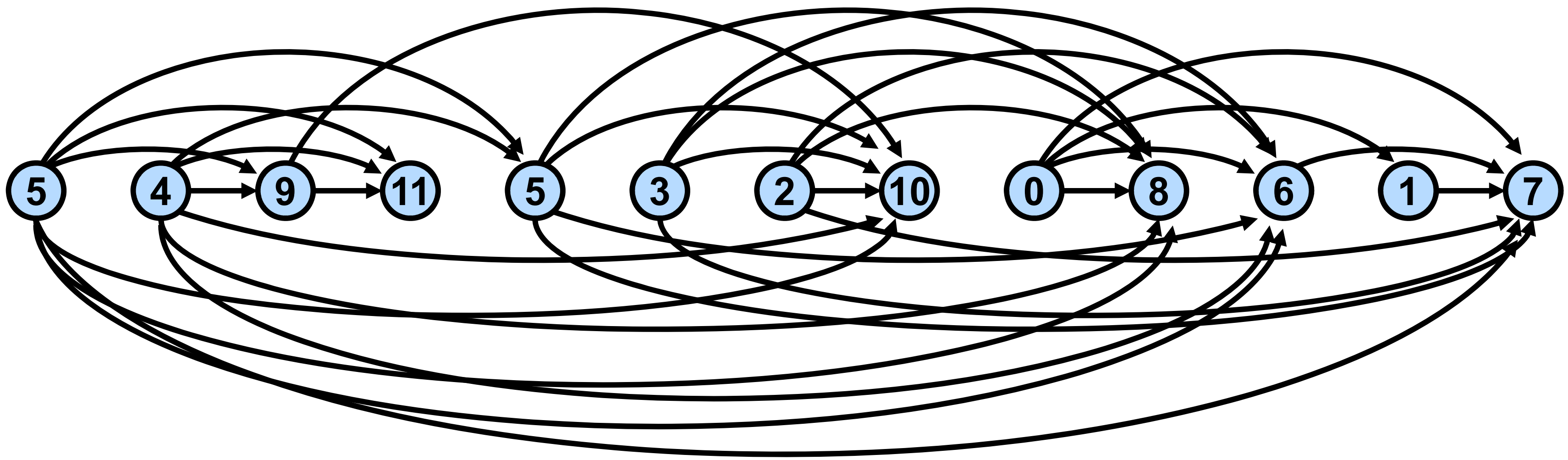
Nejdelší rostoucí podposloupnost

Koncepční přístup I

Transformace na známou úlohu

Prvky posloupnosti budou uzly DAG, který je již topologicky uspořádán, pořadí v posloupnosti = pořadí v top. uspořádání.
Hrana x --> y existuje právě tehdy,
když x je v posloupnosti dříve než y a navíc x<y.

V tomto DAG hledáme nejdelší cestu.



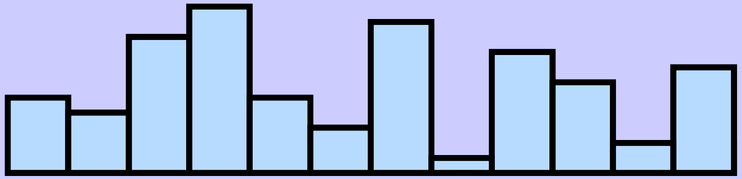
Algoritmus je znám, má složitost $\Theta(N+M)$, tedy $O(N^2)$.
Např. pro rostoucí posloupnost má složitost až $\Theta(N^2)$.

Nejdelší rostoucí podposloupnost

Koncepční přístup II

Sestav samostatný a potenciálně rychlejší algoritmus řešení:
Registrujme optimální podposloupnosti všech možných délek.
Postupně metodou DP aktualizujme tyto optimální podposloupnosti.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12



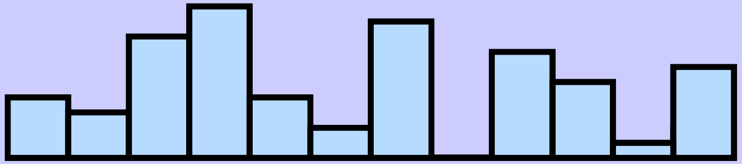
V	5	4	9	11	5	3	10	1	8	6	2	7
p	--											
iL	--											

k .. index prvku
V .. hodnota prvku
p .. index předchůdce
iL .. index posledního prvku v rostoucí podposloupnosti délky d = 1, 2, ..., N.

Pro každý index k:
Nechť d je index největšího prvku, pro který platí V[iL[d]] < V[k].
Potom iL[d+1] := k, p[k] = iL[d], pokud d existuje.
Jinak iL[1] := k, p[k] = null.
V[iL[d]], d = 1..N je neklesající, lze v ní hledat v čase O(log N).

Nejdelší rostoucí podposloupnost

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12



V	4	3	8	10	4	2	9	0	7	5	1	6

k = 11

p	--	--	2	3	2	--	5	--	5	5	8	
iL	8	11	10									
V[iL]	0	1	5									

k = 12

p	--	--	2	3	2	--	5	--	5	5	8	10
iL	8	11	10	12								
V[iL]	0	1	5	6								

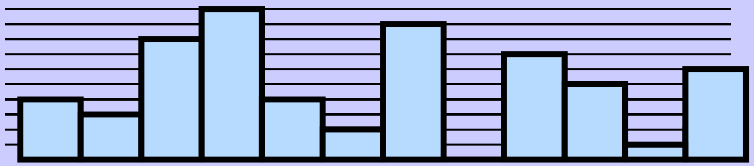
k .. index prvku
V .. hodnota prvku
p .. index předchůdce
iL .. index posledního prvku
v rostoucí podposloupnosti
délky d = 1, 2, ..., N.

Pro každý index k:
Nechť d je index max. prvku,
pro který platí
V[iL[d]] < V[k].
Potom iL[d+1] := k, p[k] = iL[d],
pokud d existuje.
Jinak iL[1] := k, p[k] = null.

Pro každé k je nalezneme d v čase O(log N) půlením intervalu.
Aktualizace iL a p proběhne v konstantním čase.
Celkem je složitost O(N log (N)).

Nejdelší rostoucí podposloupnost

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12



V	4	3	8	10	4	2	9	0	7	5	1	6

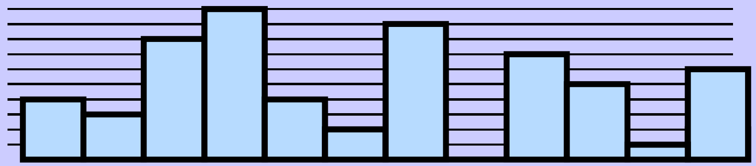
p	--			
iL	1			
V[iL]	4			

p	--	--		
iL	2			
V[iL]	3			

p	--	--	2	
iL	2	3		
V[iL]	3	8		

p	--	--	2	3
iL	2	3	4	
V[iL]	3	8	10	

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12



V	4	3	8	10	4	2	9	0	7	5	1	6

p	--	--	2	3	2			
iL	2	5	4					
V[iL]	3	4	10					

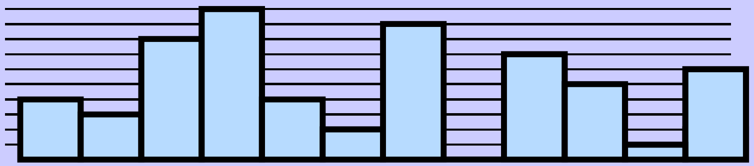
p	--	--	2	3	2	--		
iL	6	5	4					
V[iL]	2	4	10					

p	--	--	2	3	2	--	5	
iL	6	5	7					
V[iL]	2	4	9					

p	--	--	2	3	2	--	5	--
iL	8	5	7					
V[iL]	0	4	9					

Nejdelší rostoucí podposloupnost

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

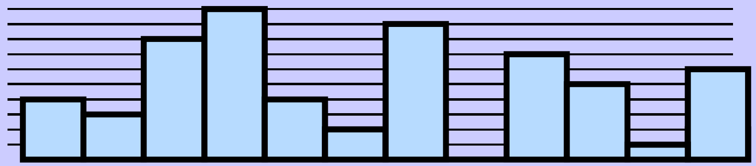


V	4	3	8	10	4	2	9	0	7	5	1	6

p	--	--	2	3	2	--	5	--				
iL	8	5	7									
V[iL]	0	4	9									

p	--	--	2	3	2	--	5	--	5			
VL	8	5	9									
V[iL]	0	4	7									

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12



V	4	3	8	10	4	2	9	0	7	5	1	6

p	--	--	2	3	2	--	5	--	5	5		
iL	8	5	10									
V[iL]	0	4	5									

p	--	--	2	3	2	--	5	--	5	5	8	
iL	8	11	10									
V[iL]	0	1	5									

p	--	--	2	3	2	--	5	--	5	5	8	10
iL	8	11	10	12								
V[iL]	0	1	5	6								

Rekonstrukce optimální cesty

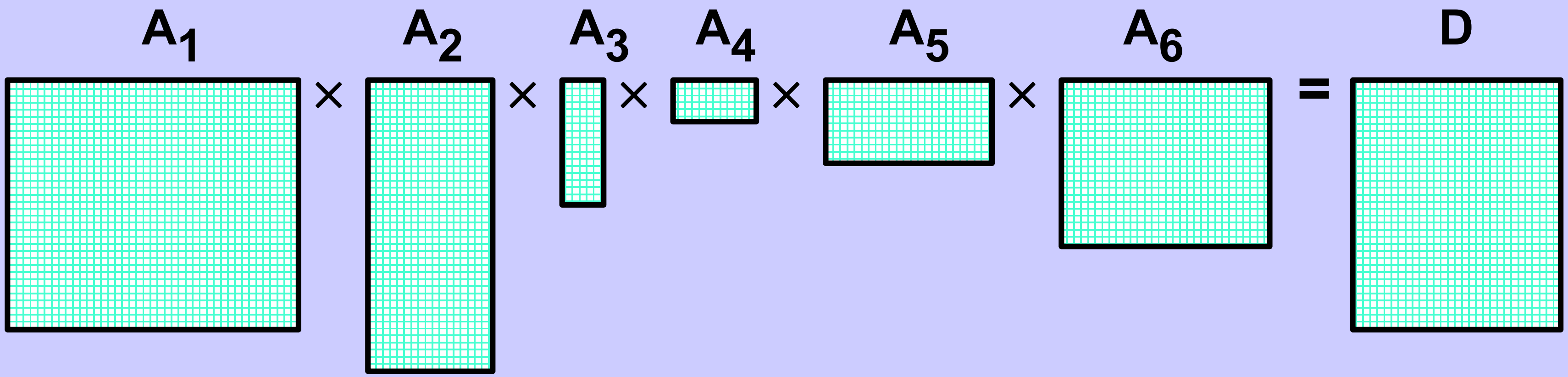
Poslední definovaný prvek v iL je indexem posledního prvku jedné z optimálních podposloupností.
Pole p určuje pomocí předchůdců tuto podposloupnost.

Optimální pořadí násobení matic

Instance úlohy

Máme spočítat co nejefektivněji součin reálných matic
$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$,
kde rozměry jednotlivých matic jsou po řadě
30×35, 35×15, 15×5, 5×10, 10×20, 20×25.
(Výsledná matice D má rozměr 30×20).

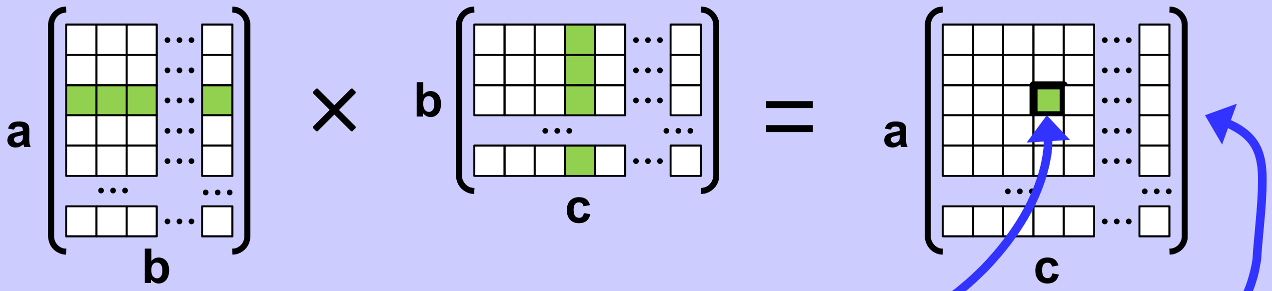
Grafická podoba (dimenze matic ve správném poměru)

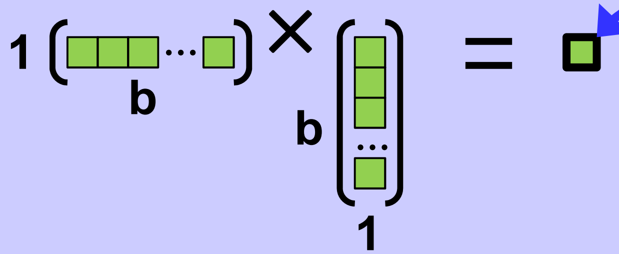


Instance převzata z [CLRS], kap. 15.

Optimální pořadí násobení matic

Počet operací v násobení dvou matic





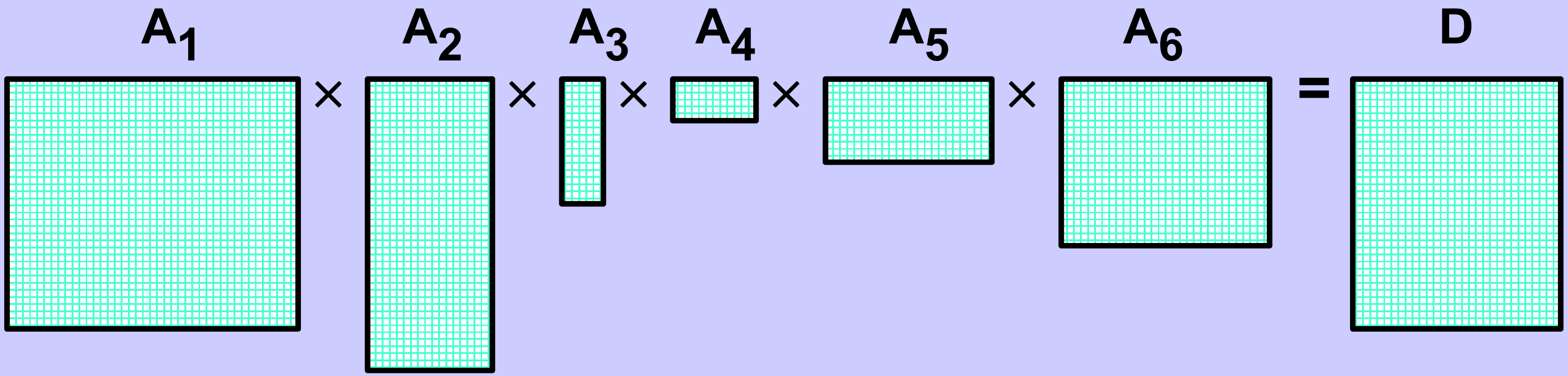
b operací násobení pro výpočet
jednoho prvku výsledné matice

a * c prvků
ve výsledné matici

Vynásobení dvou matic o rozměrech a×b a b×c
vyžaduje celkem a * b * c operací násobení dvou prvků (čísel).

Sčítání zde neuvažujeme, lze pro něj vyvinout analogický postup.

Optimální pořadí násobení matic

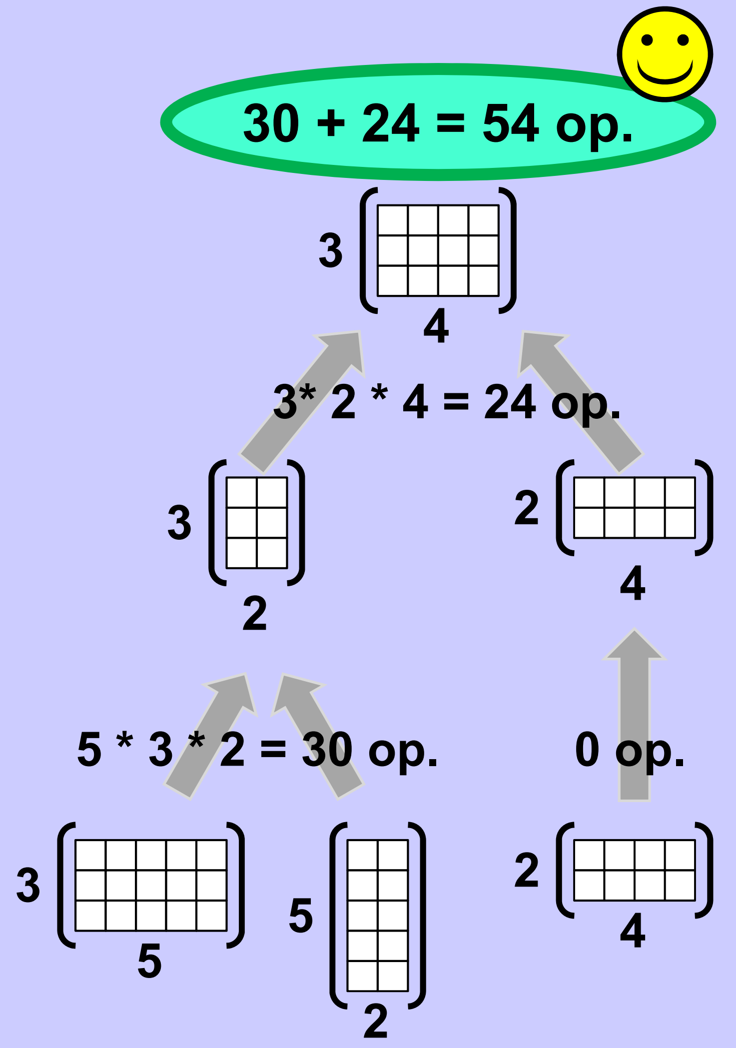


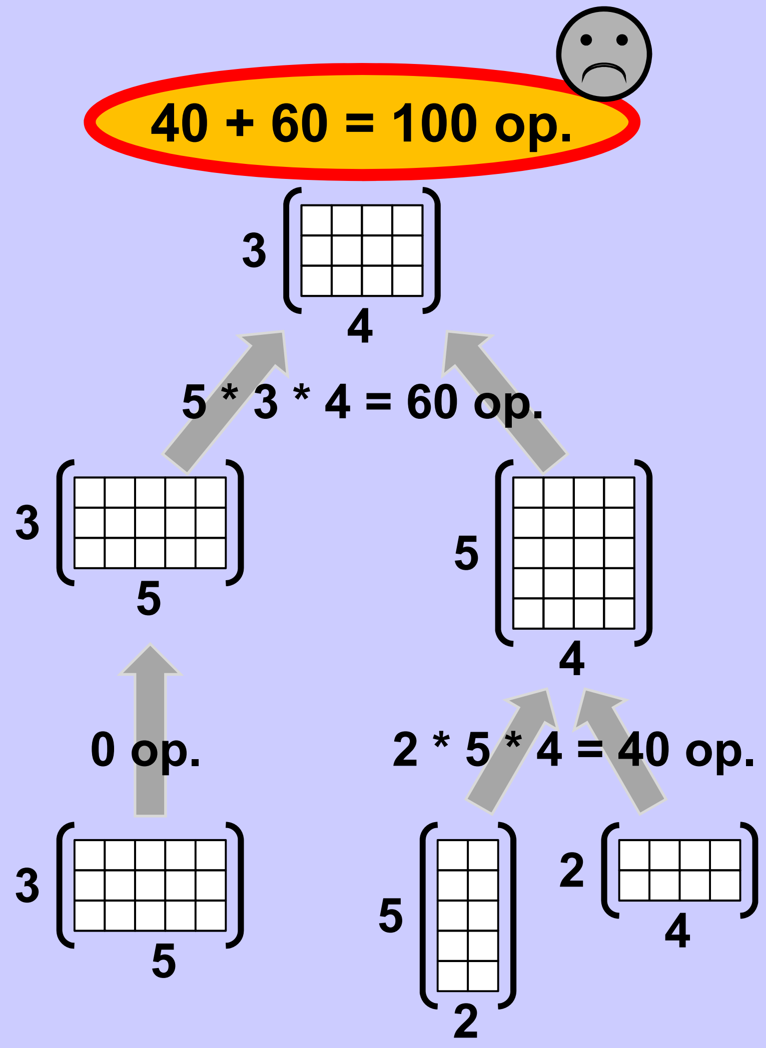
Sledujeme jen počet operací součinu dvou reálných čísel.
Uvažujeme různé možnosti uzávorkování a tím i pořadí výpočtu.

metoda	Výraz	Počet operací
zleva doprava	$((((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4) \times A_5) \times A_6$	43 500
zprava doleva	$A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times (A_4 \times (A_5 \times A_6))))$	47 500
nejhorší	$A_1 \times ((A_2 \times ((A_3 \times A_4) \times A_5)) \times A_6)$	58 000
nejlepší	$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times ((A_4 \times A_5) \times A_6)$	15 125

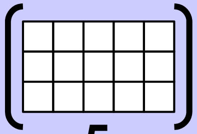
Optimální pořadí násobení matic

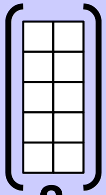
Příklad násobení více matic

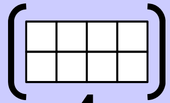




Optimální pořadí násobení matic

A_1 = 3  5

A_2 = 5  2

A_3 = 2  4

Součin $(A_1 \times A_2) \times A_3$ vyžaduje 54 operace násobení .

Součin $A_1 \times (A_2 \times A_3)$ vyžaduje 100 operací násobení.

Evidentně, na způsobu uzávorkování záleží .

Catalanova čísla C_N

Součin $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_N$ lze uzávorkovat

C_N = Comb(2N, N) / (N+1) způsoby.

$C_1, C_2, \ldots, C_7$ = 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132. $C_N > 2^N$ pro N > 7.

V obecném případě by mělo vyzkoušení všech uzávorkování exponenciální složitost.

Optimální pořadí násobení matic

Ilustrace

14 různých způsobů uzávorkování součinu 5 činitelů

$$A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times (A_4 \times A_5)))$$
$$A_1 \times (A_2 \times ((A_3 \times A_4) \times A_5))$$
$$A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times (A_4 \times A_5))$$
$$A_1 \times ((A_2 \times (A_3 \times A_4)) \times A_5)$$
$$A_1 \times (((A_2 \times A_3) \times A_4) \times A_5)$$
$$(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times (A_4 \times A_5))$$
$$(A_1 \times A_2) \times ((A_3 \times A_4) \times A_5)$$
$$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times (A_4 \times A_5)$$
$$((A_1 \times A_2) \times A_3) \times (A_4 \times A_5)$$
$$(A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times A_4))) \times A_5$$
$$(A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4)) \times A_5$$
$$((A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4)) \times A_5$$
$$((A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times A_4) \times A_5$$
$$(((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4) \times A_5$$

Optimální pořadí násobení matic

$A_1 \times (A_2 \times A_3 \times A_4 \; \dots \; \times A_{N-1} \times A_N)$

$(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4 \; \dots \; \times A_{N-1} \times A_N)$

$(A_1 \times A_2 \times A_3) \times (A_4 \; \dots \; \times A_{N-1} \times A_N)$

$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4) \times (\dots \times A_{N-1} \times A_N)$

$\dots$

$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times \dots) \times (A_{N-1} \times A_N)$

$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times \dots \times A_{N-1}) \times A_N$

N – 1 možných míst, v nichž výraz rozdělíme a provedeme poslední násobení

Předpokládejme, že máme předpočítáno optimální uzávorkování pro každý modrý úsek celkového výrazu.

Optimální pořadí násobení matic

$$A_1 \times (A_2 \times A_3 \times A_4 \; \dots \times A_{N-1} \times A_N) = B[1,1] \times B[2,N]$$
$$(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4 \; \dots \times A_{N-1} \times A_N) = B[1,2] \times B[3,N]$$
$$(A_1 \times A_2 \times A_3) \times (A_4 \; \dots \times A_{N-1} \times A_N) = B[1,3] \times B[4,N]$$
$$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4) \times (\dots \times A_{N-1} \times A_N) = B[1,4] \times B[5,N]$$
$$\dots \qquad\qquad \dots$$
$$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times \dots) \times (A_{N-1} \times A_N) = B[1,N-2] \times B[N-1,N]$$
$$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times \dots \times A_{N-1}) \times A_N = B[1,N-1] \times B[N,N]$$

Matice B[i, j] představuje výsledek vynásobení odpovídajícího úseku.

Nechť r(X) resp. s(X) představují počet řádků resp sloupců matice X.
Podle pravidel násobení matic platí
$r(B[i, j]) = r(A_i)$, $s(B[i, j]) = s(A_j)$, pro $1 \le i \le j \le N$.

Optimální pořadí násobení matic

Nechť MO[i, j] představuje minimální počet operací potřebných k výpočtu matice B[i, j], tj. minimální počet operací potřebných k výpočtu matice $A_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_{j-1} \times A_j$.

B[1,1]	$\times$	B[2,N]	$MO[1,1] + r(A_1)*s(A_1)*s(A_N) + MO[2, N]$
B[1,2]	$\times$	B[3,N]	$MO[1,2] + r(A_1)*s(A_2)*s(A_N) + MO[3, N]$
B[1,3]	$\times$	B[4,N]	$MO[1,3] + r(A_1)*s(A_3)*s(A_N) + MO[4, N]$
	. . .		
B[1,N-2]	$\times$	B[N-1,N]	$MO[1,N-2] + r(A_1)*s(A_{N-2})*s(A_N) + MO[N-1, N]$
B[1,N-1]	$\times$	B[N,N]	$\underbrace{MO[1,N-1]}_{\text{operací v levém úseku}} + \underbrace{r(A_1)*s(A_{N-1})*s(A_N)}_{\text{operací při násobení } B[1,.] \times B[.,N]} + \underbrace{MO[N, N]}_{\text{operací v pravém úseku}}$

Celkem dostáváme MO[1,N]:

$MO[1,N] = \min\{MO[1,k] + r(A_1)*s(A_k)*s(A_N) + MO[k+1, N] \mid k = 1..N-1\}$

Optimální pořadí násobení matic

$$MO[1,N] = \min \{MO[1,k] + r(A_1)*s(A_k)*s(A_N) + MO[k+1, N] \mid k = 1..N-1\}$$

Za předpokladu znalosti MO[i, j] pro úseky kratší než [1, N], lze řešení celé úlohy, tj. hodnotu MO[1, N], spočíst v čase $\Theta(N)$. (*)

Rekurentní využití řešení menších podúloh

Identické úvahy, jaké jsme provedli pro celý výraz

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_N$,

provedeme rovněž pro každý jeho souvislý úsek

$\ldots A_L \times A_{L+1} \times \ldots \times A_{R-1} \times A_R \ldots$, $1 \le L \le R \le N$.

Počet těchto souvislých úseků je stejný jako počet dvojic indexů (L, R), kde $1 \le L \le R \le N$. Ten je roven Comb(N, 2) $\in \Theta(N^2)$.
Podúlohu na úseku (L, R) lze spočíst podle (*) v čase O(N), celou úlohu tak lze vyřešit v čase $O(N^3)$.

Optimální pořadí násobení matic

*

$MO[L,R] = \min \{MO[L,k] + r(A_L)*s(A_k)*s(A_R) + MO[k+1,R] \mid k = L..R-1\}$

Hodnoty MO[L,R] ukládáme do 2D pole na pozici s indexy [L][R].

Při výpočtu MO[L,R] podle * používáme vesměs hodnoty MO[x,y], kde rozdíl y - x (odpovídající délce podvýrazu) je menší než rozdíl R - L.
Tabulku DP proto vyplňujeme v pořadí rostoucích rozdílů R - L.

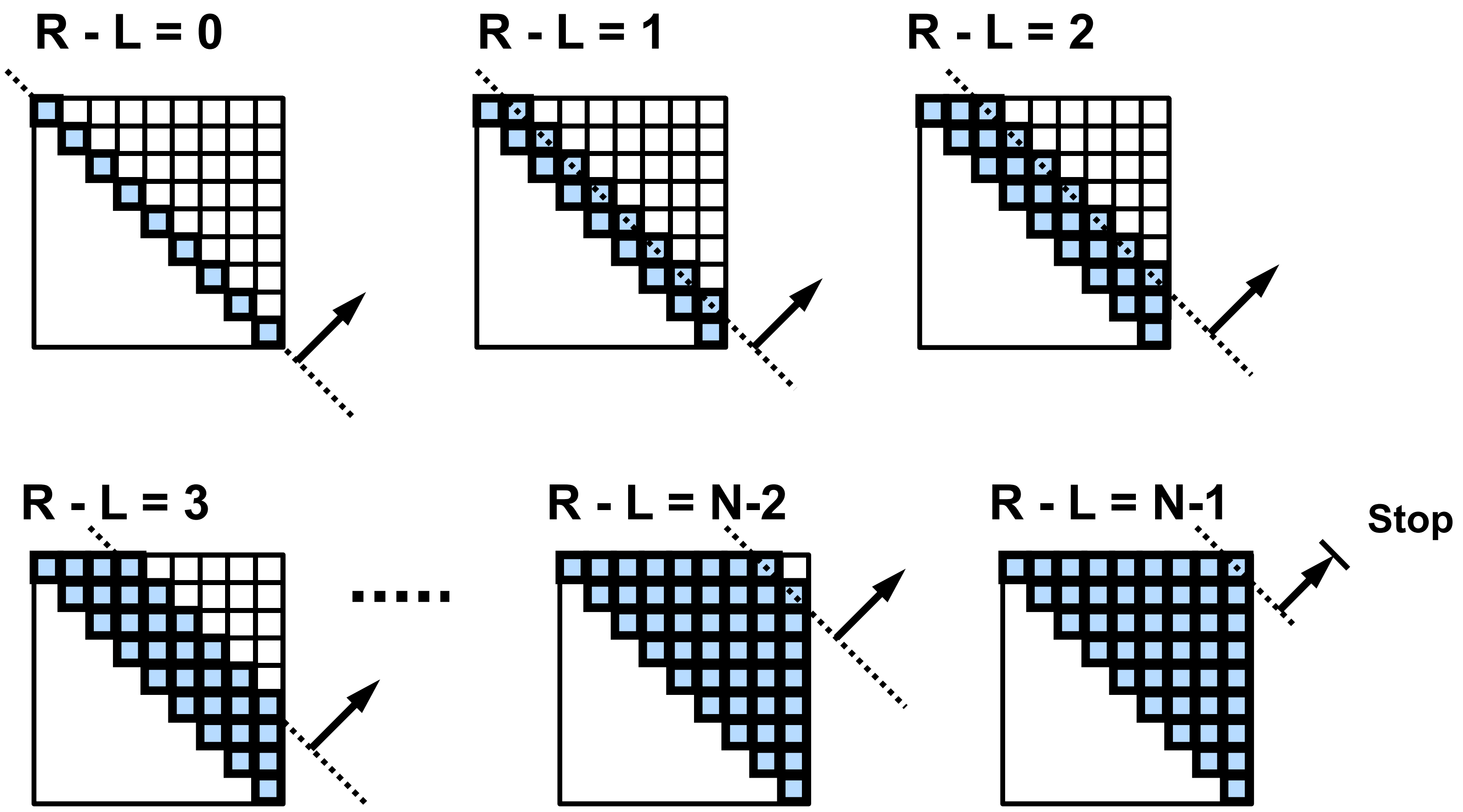
0. Vyplníme prvky s indexy[L][R], kde R-L = 0, to je hlavní diagonála.
1. Vyplníme prvky s indexy[L][R], kde R-L = 1, to je diagonála těsně nad hlavní diagonálou.
2. Vyplníme prvky s indexy[L][R], kde R-L = 2, to je diagonála těsně nad předchozí diagonálou.

...

N-1. Vyplníme prvek s indexem [L][R], kde R-L = N-1, to je pravý horní roh tabulky.

Optimální pořadí násobení matic

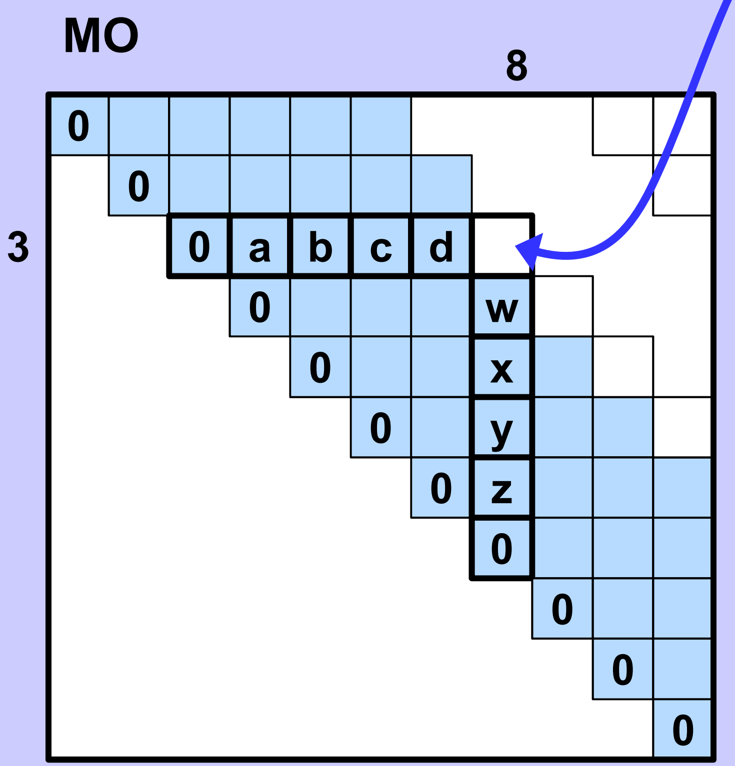
Schéma postupu výpočtu



Optimální pořadí násobení matic

$$MO[L,R] = \min \{MO[L,k] + r(A_L)*s(A_k)*s(A_R) + MO[k+1,R] \mid k = L..R-1\}$$

Ukázka postupu výpočtu



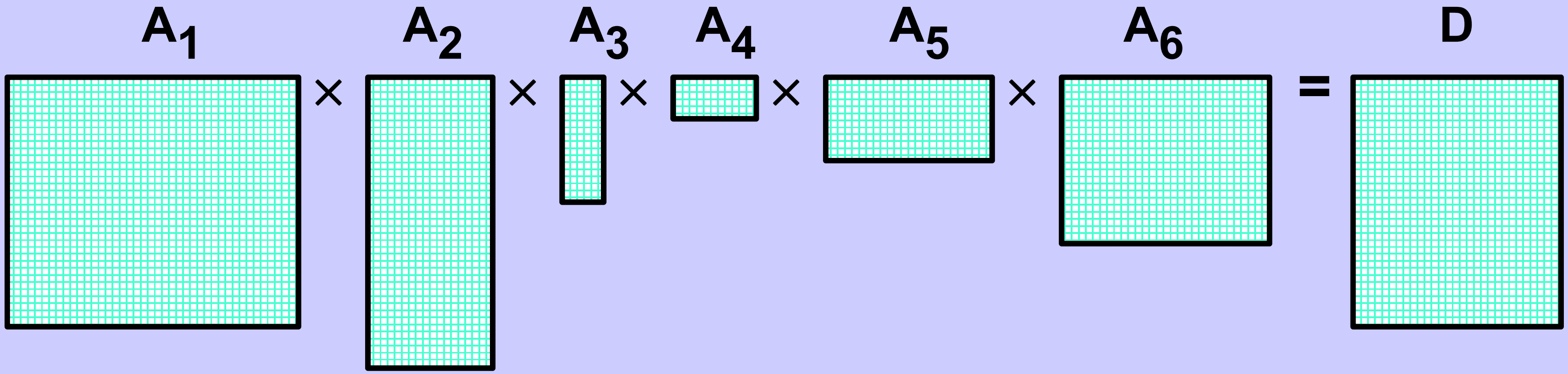
$MO[3,8] = \min \{$
$MO[3,3] + r(A_3)*s(A_3)*s(A_8) + MO[4,8],$
$MO[3,4] + r(A_3)*s(A_4)*s(A_8) + MO[5,8],$
$MO[3,5] + r(A_3)*s(A_5)*s(A_8) + MO[6,8],$
$MO[3,6] + r(A_3)*s(A_6)*s(A_8) + MO[7,8],$
$MO[3,7] + r(A_3)*s(A_7)*s(A_8) + MO[8,8]\}$

Označme $P[L, R] := r(A_L)*s(A_R)$. Potom

$MO[3,8] = \min \{$
$0 + s(A_3)*P[3,8] + w,$
$a + s(A_4)*P[3,8] + x,$
$b + s(A_5)*P[3,8] + y,$
$c + s(A_6)*P[3,8] + z,$
$d + s(A_7)*P[3,8] + 0\}.$

Optimální pořadí násobení matic

Instance úlohy



30×35 35×15 15×5 5×10 10×20 20×25 30×25

MO

	1	2	3	4	5	6
1	0	15750	7875	9375	11875	$\boxed{15125}$
2	0	0	2625	4375	7125	10500
3	0	0	0	750	2500	5375
4	0	0	0	0	1000	3500
5	0	0	0	0	0	5000
6	0	0	0	0	0	0

optimum

Optimální pořadí násobení matic

$$MO[L,R] = \min \{MO[L,k] + r(A_L)*s(A_k)*s(A_R) + MO[k+1,R] \mid k = L..R-1\}$$

Při určení MO[L,R] do rekonstrukční tabulky RT zaneseme
na pozici [L][R] hodnotu k, v němž minimum * nastalo.
Hodnota k určuje optimální rozdělení úseku

$(A_L \times A_{L+1} \times \dots \times A_R)$

na dva menší optimální úseky

$(A_L \times A_{L+1} \times \dots \times A_k) \times (A_{k+1} \times A_{k+2} \times \dots \times A_R)$

Hodnota RT[1, N] určuje optimální rozdělení celého výrazu

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N$

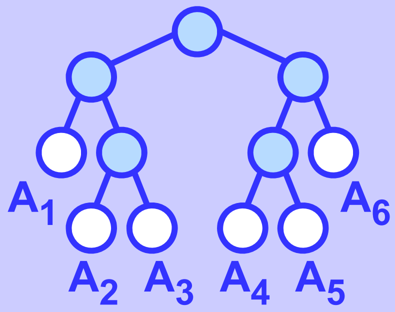
na první dva menší optimální úseky

$(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) \times (A_{k+1} \times A_{k+2} \times \dots \times A_N)$.

Dále rekonstrukce optimálních úseků pokračuje rekurentně analogicky.

Optimální pořadí násobení matic

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	3	3	3
2	0	0	2	3	3	3
3	0	0	0	3	3	3
4	0	0	0	0	4	5
5	0	0	0	0	0	5
6	0	0	0	0	0	0



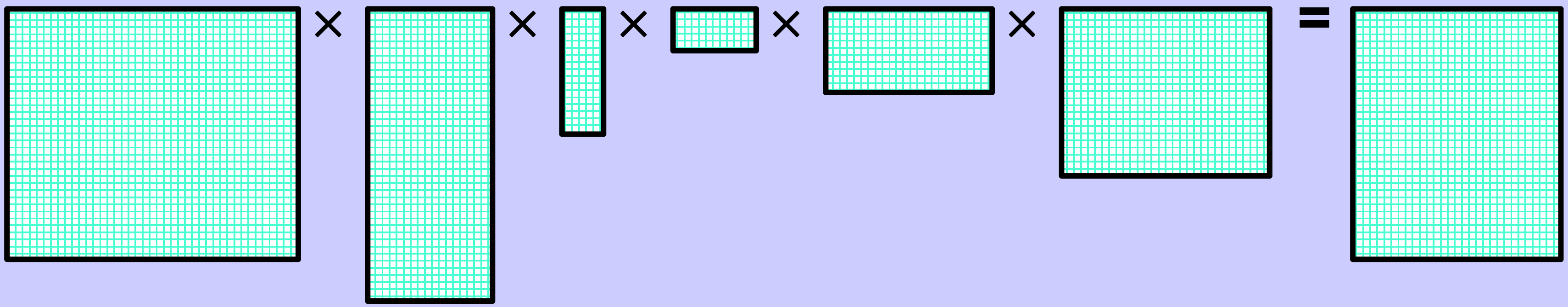
$A_1 \longleftrightarrow A_6$ A_1

$A_1 \longleftrightarrow A_3 \times A_4 \longleftrightarrow A_6$

$A_1 \longleftrightarrow A_1 \times A_2 \longleftrightarrow A_3 \quad A_4 \longleftrightarrow A_5 \times A_6 \longleftrightarrow A_6$

RT
D

$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times ((A_4 \times A_5) \times A_6)$



Optimální pořadí násobení matic

Odvození asymptotické složitosti

index řádku	Řádkové součty
$k = N-1$	$1/2 * (N-1) * N$
$k = N-2$	$1/2 * (N-2) * (N-1)$
$k = N-3$	$1/2 * (N-3) * (N-2)$
$k = k$	$1/2 * k * (k+1)$
$k = 3$	$1/2 * 3 * 4$
$k = 2$	$1/2 * 2 * 3$
$k = 1$	$1/2 * 1 * 2$

Počet buněk, z nichž je počítán obsah dané buňky v DP tabulce, je úměrný složitosti výpočtu obsahu této buňky.

1	2	3			N–3	N–2	N–1
	1	2			N–4	N–3	N–2
		1			N–5	N–4	N–3
				1	N–k–2	N–k–1	N–k
					1	2	3
						1	2
							1

Celkový součet

$$1/2 * \sum_{k=1}^{N-1} k * (k+1) = 1/2 * \sum_{k=1}^{N-1} k^2 + 1/2 * \sum_{k=1}^{N-1} k$$

$$= 1/2 * (N-1) * N * (2N-1)/6 + 1/2 * (N-1) * N/2 \in \Theta(N^3)$$