Níže uvedené úlohy představují přehled otázek, které se vyskytly v tomto nebo v minulých semestrech ve cvičení nebo v minulých semestrech u zkoušky. Mezi otázkami semestrovými a zkouškovými není žádný rozdíl, předpokládáme, že připravený posluchač dokáže zdárně zodpovědět většinu z nich.

Tento dokument je k dispozici ve variantě převážně s řešením a bez řešení.

Je to pracovní dokument a nebyl soustavně redigován, tým ALG neručí za překlepy a jazykové prohřešky, většina odpovědí a řešení je ale pravděpodobně správně :-).

--- COMPLEXITY ---

1.

Průnik množin $\Omega(2n)$ a $O(n \cdot \log(n))$

a) obsahuje funkci $n/2$
b) obsahuje funkci $n + \log(n)$
c) obsahuje funkci n^2
d) obsahuje všechny funkce uvedené v a), b), c)
e) je prázdný

2.

Průnik množin $\Omega(n)$ a $O(n \cdot \log(n))$

1. obsahuje funkci $\log(n)$
2. obsahuje funkci $n/2$
3. obsahuje funkci n^2
4. je prázdný
5. není definován

3.

Průnik množin $\Omega(n \cdot \log(n))$ a $O(n^2/2)$

a) obsahuje funkci $n+n^2$
b) obsahuje funkci $\log(n)$
c) obsahuje funkci $n/2$
d) je prázdný
e) není definován

4.

Průnik množin $O(n^2)$ a $\Omega(n \cdot \log(n))$

a) obsahuje funkci $\log(n)$
b) obsahuje funkci $2 \cdot n$
c) obsahuje funkci $2 \cdot n^2$
d) je prázdný
e) není definován

5.

Datová struktura D obsahuje pouze jednosměrně zřetězený spojový seznam s n prvky a ukazatel na první prvek seznamu. Odstranění posledního prvku seznamu je operací se složitostí

a) $O(1)$
b) $\Theta(1)$
c) $\Theta(\log_2(n))$
d) $\Omega(n)$
e) $\Omega(n \cdot \log_2(n))$

6.
Datová struktura D obsahuje pouze obousměrně zřetězený spojový seznam s n prvky a ukazatel na první prvek seznamu. Asymptotická složitost operace vložení nového prvku do tohoto seznamu je v nejlepším případě

a) $O(0)$
b) $\Theta(1)$
c) $\Theta(\log_2(n))$
d) $\Omega(n)$
e) $\Omega(n \cdot \log_2(n))$

7.
The set $O(n \cdot \log(n))$ is a subset of

a) $\Theta(n \cdot \log(n))$
b) $\Omega(n \cdot \log(n))$
c) $O(\log(n))$
d) $O(n^2)$
e) $O(n)$

8.
For function $f(x)$ holds $f(x) \in O(x^2 \cdot \log_2(x))$ and $f(x) \in \Omega(x^2)$. These conditions are valid just for one function from the following list:

a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = x \cdot \log_2(x)$
c) $f(x) = x^2$
d) $f(x) = 2^x$

9.
For function $f(x)$ holds $f(x) \in \Omega(x^2)$ and $f(x) \in O(x^3)$. These conditions are valid just for one function from the following list:

a) $f(x) = x^2 \cdot \log_2(x)$
b) $f(x) = x \cdot \log_2(x)$
c) $f(x) = 2^x$
d) $f(x) = x + 1$

10.
Právě jeden z následujících výroků je nepravdivý. Označte jej.

a) $x^2 \in \Omega(x + \log_2(x))$
b) $x^2 \in \Omega(x \cdot \log_2(x))$
c) $x^2 \in \Theta(x + \log_2(x))$
d) $x^2 \in O(x^2 - \log_2(x))$
e) $x^2 \in \Theta(x^2 + \log_2(x))$

Když k funkci f přičteme funkci g, která roste asymptoticky pomaleji, než funkce f, výsledný součet poroste asymptoticky stejně rychle jako původní funkce f. Proto můžeme pravou stranu zadání v případech a), c), d), e) zjednodušit:

a) $x^2 \in \Omega(x)$
b) $x^2 \in \Omega(x \cdot \log_2(x))$
c) $x^2 \in \Theta(x)$
d) $x^2 \in O(x^2)$
e) $x^2 \in \Theta(x^2)$

Funkce x roste rychleji než funkce 1 i než funkce $\log_2(x)$, takže funkce $x^2 = x \cdot x$ roste rychleji než funkce $x = x \cdot 1$ i než funkce $x \cdot \log_2(x)$, takže varianta a) i b) je pravdivá. Varianty d) a e) jsou pravdivé zcela zřejmě, takže jako jediná nepravdivá zbává jen varianta c) jejíž nepravdivost ostatně vyplývá již z první věty tohoto odstavce.

11.
Algoritmus A projde celým polem délky N a prvek s indexem k zpracuje za $c+\log_2(N)$ milisekund. Konstanta c je stále stejná. Asymptotická složitost zpracování celého pole je

a) $\Omega(N^2)$
b) $\Omega(c \cdot N^2)$
c) $\Theta(N \cdot \log_2(N))$
d) $O(c \cdot \log_2(N))$
e) $\Theta(c+\log_2(N))$

Doba zpracování prvku s indexem k nezáleží na hodnotě k. Prvků je celkem N, takže celková doba zpracování je tak $N \cdot (c+\log_2(N)) = c \cdot N + N \cdot \log_2(N)$. Diky tomu, že c je konstanta, funkce $c \cdot N$ roste asymptoticky pomaleji než funkce $N \cdot \log_2(N)$, a tudíž nemá žádný vliv na aymtotickou rychlost růstu funkce $c \cdot N + N \cdot \log_2(N)$. Zbývá tak člen $N \cdot \log_2(N)$, který určuje asymptotickou složitost naznačenou ve variantě c). Funkce ve variantách a) a b) rostou asymptoticky rychleji, naopak funkce ve variantách d) a e) rostou asymptoticky pomaleji.

12.
Algoritmus A projde celým polem délky N a prvek s indexem k zpracuje za $c \cdot k$ milisekund. Konstanta c je stále stejná. Asymptotická složitost zpracování celého pole je

a) $O(N \cdot \log_2(N))$
b) $\Theta(N^2)$
c) $O(k \cdot N)$
d) $\Theta(c \cdot N)$
e) $\Theta(c \cdot k)$

Úloha testuje schopnost sečíst jednoduchou aritmetickou posloupnost. Celková složitost výpočtu je $c \cdot 1 + c \cdot 2 + c \cdot 3 + \dots + c \cdot N = c \cdot (1+2+3+ \dots + N) = c \cdot N(N+1)/2 = c/2 \cdot (N^2 + N)$. Poslední výraz je zřejmě prvkem množiny $\Theta(N^2)$, což odpovídá variantě b). Varianty c), d), e) vyjadřují nižší asymptotickou složitost, c) a d) složitost lineární, e) složitost konstatntní, má-li vůbec výraz v e) nějaký smysl, když k nemá žádnou určenou hodnotu. Rovněž varianta a) vyjadřuje menší asymptotickou složitost.

13.
Algoritmus A provede jeden průchod polem s *n* prvky. Při zpracování prvku na pozici *k* provede *k*+*n* operací. Operační (=asymptotická) složitost algoritmu A je tedy

a) $\Theta(k+n)$
b) $\Theta(\ (k+n)\cdot n\ )$
c) $\Theta(k^2+n)$
d) $\Theta(n^2)$
e) $\Theta(n^3)$

Celkem je provedený počet operací při zpracování všech prvků roven
$(1+n) + (2+n) + (3+n) + \dots + (n+n) = n \cdot ((1+n) + (n+n))/2 = n \cdot (1+3n)/2 = 3n^2/2 + n/2 \in \Theta(n^2)$

Povážíme-li navíc ještě režii na přesun od jednoho prvku pole k následujícímu, která má nanejvýš konstantní složitost, připošteme k výsledku ještě člen $\Theta(konst \cdot n)$, který ovšem na složitosti $\Theta(n^2)$ nic nemění. Platí varianta d).

14.
Algoritmus A probírá postupně všechny prvky v dvourozměrném poli o velikosti $n \times n$ a s každým prvkem provádí další (nám neznámou) akci, jejíž složitost je $\Theta(\log_2(n))$. Celková asymptotická složitost algoritmu A je tedy

a) $\Theta(n \cdot \log_2(n))$
b) $\Theta(n^2)$
c) $\Theta(n^3)$
d) $\Theta(n^2+\log_2(n))$
e) $\Theta(n^2 \cdot \log_2(n))$

Řešení
Je nutno provést $n \times n$ akcí o složitosti úměrné $\log_2(n)$, tedy složitost všech akcí dohromady je úměrná $n^2 \cdot \log_2(n)$. Přesun od jednoho prvku k druhému v poli má složitost konstantní, takže samotný průchod celým polem má složitost úměrnou konstanta $\cdot\, n^2$. Celkem tak máme složitost $\Theta(n^2 \cdot \log_2(n) + \text{konstanta} \cdot n^2) = \Theta(n^2 \cdot \log_2(n))$. To je právě varianta e).

15.
Pro rostoucí spojité fukce f(x), g(x) platí $f(x) \in \Omega(g(x))$. Z toho plyne, že

a) $f(x) \in O(g(x))$
b) $f(x) \in \Theta(g(x))$
c) $g(x) \in \Theta(f(x))$
d) $g(x) \in \Omega(f(x))$
e) $g(x) \in O(f(x))$

Řešení

$f(x) \in \Omega(g(x))$ znamená, že f(x) roste rychleji nebo stejně rychle jako g(x). Tudíž g(x) roste pomaleji nebo stejně rychle jako f(x). To vyjadřujeme zápisem $g(x) \in O(f(x))$. Platí možnost e).

16.

Pro rostoucí spojité fukce f(x), g(x) platí $f(x) \in O(g(x))$. Z toho plyne, že

a) $f(x) \in \Theta(g(x))$
b) $f(x) \in \Omega(g(x))$
c) $g(x) \in \Theta(f(x))$
d) $g(x) \in \Omega(f(x))$
e) $g(x) \in O(f(x))$

Řešení

$f(x) \in O(g(x))$ znamená, že f(x) roste pomaleji nebo stejně rychle jako g(x). Tudíž g(x) roste rychleji nebo stejně rychle jako f(x). To vyjadřujeme zápisem $g(x) \in \Omega(f(x))$. Platí možnost d).

17.

Pokud funkce f roste asymptoticky stejně rychle jako funkce g (tj. $f(x) \in \Theta(g(x))$), platí právě jedno následující tvrzení. Které?

a) jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak f(x) = g(x)
b) ani poměr f(x)/g(x) ani poměr g(x)/f(x) nekonverguje k nule s rostoucím x
c) rozdíl f(x) - g(x) je kladný pro každé x > y, kde y je nějaké dostatečně velké číslo
d) obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty
e) nic z předchozího

Řešení

Stejně rychlý asymptotický růst neznamená, že se musí funkce nutně rovnat, varianta a) odpadá. Stejně tak neznamená, že by jedna funkce musela nutně být větší než druhá, odpadá i varianta c). Chování funkcí v okolí nuly není pro asymptotické chování významné, varianta d) zbytečně žádá příliš mnoho. Stejně rychlý asymptotický růst znamená, že v okolí nekonečna poměr f(x)/g(x) ani poměr g(x)/f(x) nepřekročí nějakou pevnou konstantu. To ovšem znamená, že žádný z těchto poměrů nekonverguje k 0, platí varianta b).

18.

Právě jeden z následujících výroků je nepravdivý. Označte jej.

a) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2 - x)$
b) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2 - \log_2(x))$
c) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x^2 - \log_2(x))$
d) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x + \log_2(x))$
e) $x \cdot \log_2(x) \in \Theta(x \cdot \log_2(x^2))$

Řešení

Když k funkci f přičteme funkci g, která roste asymptoticky pomaleji, než funkce f, výsledný součet poroste asymptoticky stejně rychle jako původní funkce f. Proto můžeme pravou stranu zadání v případě a) – d) zjednodušit:

a) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2)$
b) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2)$

c) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x^2)$
d) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x)$
e) $x \cdot \log_2(x) \in \Theta(x \cdot \log_2(x^2)) = \Theta(x \cdot 2 \cdot \log_2(x)) = \Theta(x \cdot \log_2(x^2))$

Funkce $\log_2(x)$ roste pomaleji než funkce x, takže funkce $x \cdot \log_2(x)$ roste pomaleji než funkce $x \cdot x = x^2$, takže varianta a) i b) je pravdivá. Funkce $\log_2(x)$ má v plus nekonečnu limitu plus nekonečno, takže funkce $x \cdot \log_2(x)$ roste asymptoticky rychleji než funkce x, takže varianta d) je pravdivá. Varianta e) po naznačené úpravě je také zřejmě pravdivá. Zbývá jediná nepravdivá varianta c), jejíž nepravdivost ostatně vyplývá již z první věty tohoto odstavce.

19.

V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (........) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.

a) $x^2 \cdot 2^x \in$ ....$((\ln(x^2))^2 + 2^x)$
b) $(\ln(x^2))^2 + 2^x \in$ ....$(x^2 + \ln(x^2))$
c) $2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \notin$ ....$(2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1})$

Řešení
a) funkce nalevo zřejmě roste rychleji než funkce napravo, neboť obě funkce obsahují výraz 2^x, který je však nalevo vynásoben výrazem x^2**,** jenž roste asymptoticky rychleji než (pouze!) aditivní výraz $(\ln(x^2))^2$ napravo. Jediná správná možnost je proto
$x^2 \cdot 2^x \in \Omega((\ln(x^2))^2 + 2^x)$.

b) funkce nalevo obsahuje člen 2^x, funkce napravo je součtem dvou členů, které oba zřejmě rostou asymptoticky pomaleji než 2^x. Funkce nalevo tedy roste asymptoticky rychleji, takže jediná správná možnost je
$(\ln(x^2))^2 + 2^x \in \Omega(x^2 + \ln(x^2))$.

c) funkci napravo lze napsat jako
$2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1} = 2^x \cdot (2 \cdot \ln(x))^{-1} = 2^{-1} \cdot 2^x \cdot (\ln(x))^{-1}$
Tato funkce se od funkce nalevo liší jen o multiplikativní konstantu, takže obě funkce rostou asymptoticky stejně rychle. Platí tudíž všechny tři možnosti:
$2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \in O(2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1})$
$2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \in \Theta (2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1})$
$2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \in \Omega (2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1})$,
takže situace (se škrtnutým symbolem náležení) v zadání nemůže nastat, tudíž je nutno prázdné místo proškrtnout.

20.

V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (........) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.
a) $x^2 \cdot \ln(x^2) \in$ ....$(x^2 + \ln(x))$
b) $x^3 + \ln(x^2) \in$ ....$(x^3 + 2^x)$
c) $x^3 \cdot \ln(x^2) \notin$ ....$(\ln(x^2) + 2^x)$

Řešení:
a) funkce na pravé straně je součtem dvou funkcí, z nichž druhá -- $\ln(x)$ -- roste asymptoticky pomaleji než první -- x^2. Celkem tedy funkce na pravé straně roste asymptoticky stejně rychle

jako x^2. Funkce na levé straně však díky multiplikativnímu členu $\ln(x^2)$ roste asymptoticky rychleji než x^2.
Tudíž platí právě
$x^2 \cdot \ln(x^2) \in \Omega(x^2 + \ln(x))$.

b) funkce na pravé straně obsahuje exponenciální člen, funkce na levé straně jen člen polynomiální a logaritmický, jež vesměs rostou asymptoticky pomaleji než exponenciála, takže funkce na pravé straně roste asymptoticky rychleji, platí tedy právě:
$x^3 + \ln(x^2) \in O(x^3 + 2^x)$.

c) podle podobné úvahy jako v b) roste funkce na pravé straně asymptoticky rychleji než funkce na levé straně. Tudíž funkce na levé straně neroste ani asymptoticky stejně rychle ani neroste asymptoticky rychleji. Formálně vyjádřeno:
$x^3 \cdot \ln(x^2) \notin \Theta(\ln(x^2) + 2^x)$,
$x^3 \cdot \ln(x^2) \notin \Omega(\ln(x^2) + 2^x)$.

21.
Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné f(x), g(x) a h(x), pro které současně platí všechny tři následující vztahy:
$f(x) \notin O(g(x))$, $g(x) \notin \Theta(h(x))$, $h(x) \notin \Omega(f(x))$
Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.

Řešení
První vztah říká, že f(x) musí růst asymptoticky rychleji než g(x), třetí vztah říká, že f(x) musí růst asymptoticky rychleji než h(x). Druhý vztah říká, že asymptotická rychlost růstu g(x) a h(x) není stejná. Můžeme tedy volit např.:
$f(x) = x^2$
$g(x) = x$
$h(x) = \ln(x)$.
o

22.
Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné f(x), g(x) a h(x), pro které současně platí všechny tři následující vztahy:
$f(x) \notin O(g(x))$, $g(x) \notin \Omega(h(x))$, $h(x) \notin \Theta(f(x))$
Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.

Řešení
První vztah říká, že f(x) roste asymptoticky rychleji než g(x), druhý vztah říká, že g(x) roste asymptoticky pomaleji než h(x), celkem tedy g(x) roste asymptoticky pomaleji než f(x) i h(x). Poslední vztah pak říká, že f(x) a h(x) nerostou asymptoticky stejně rychle.
Můžeme tedy volit např.:
$f(x) = x^2$
$g(x) = \ln(x)$
$h(x) = x$.