

Lineární diskriminační funkce. Perceptronový algoritmus.

Petr Pošík

Katedra kybernetiky

ČVUT FEL

Úvod: Diskriminační funkce

Binární klasifikace

Diskriminační funkce:
příklady

Druhy diskriminační
funkce

Učení lineární
diskriminační funkce

Učení lineární
diskriminační funkce

Úvod: Diskriminační funkce

Úloha binární klasifikace (dichotomie)

Úvod: Diskriminační funkce

Binární klasifikace

Diskriminační funkce: příklady

Druhy diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Mějme trénovací sadu dat $(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_m, y_m)$:

- ✓ každý objekt \mathbf{x} je popsán vektorem reálných příznaků (x_1, x_2, \dots, x_D)
- ✓ každý objekt \mathbf{x} je označen správným štítkem $y \in \{+1, -1\}$

Diskriminační funkce je funkce, která umožňuje *rozlišit*, do které třídy objekt patří.

Binární klasifikace objektů \mathbf{x} (klasifikace do 2 tříd, dichotomie):

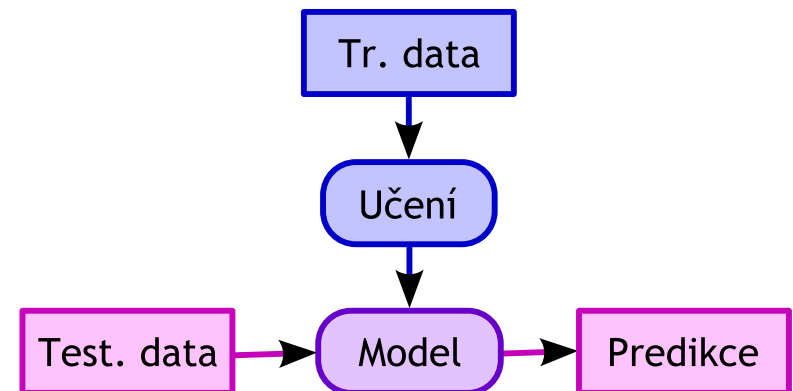
- ✓ Stačí 1 diskriminační funkce
- ✓ Pravidlo:

$$f(\mathbf{x}_i) > 0 \iff y_i = +1$$

$$f(\mathbf{x}_i) < 0 \iff y_i = -1$$

neboli

$$y_i = \text{sign}(f(\mathbf{x}))$$



Diskriminační funkce: příklady

Úvod: Diskriminační funkce

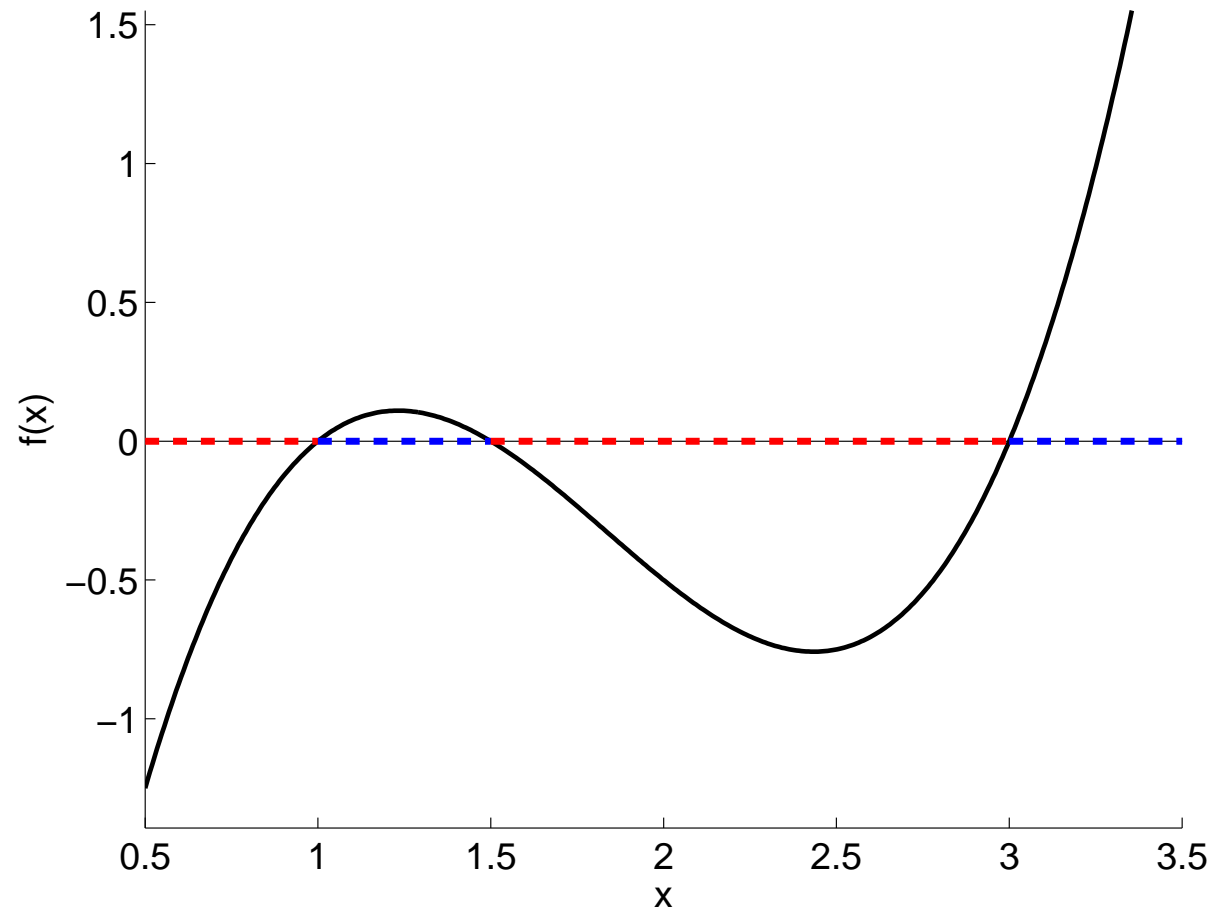
Binární klasifikace

Diskriminační funkce: příklady

Druhy diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce



Diskriminační funkce: příklady

Úvod: Diskriminační funkce

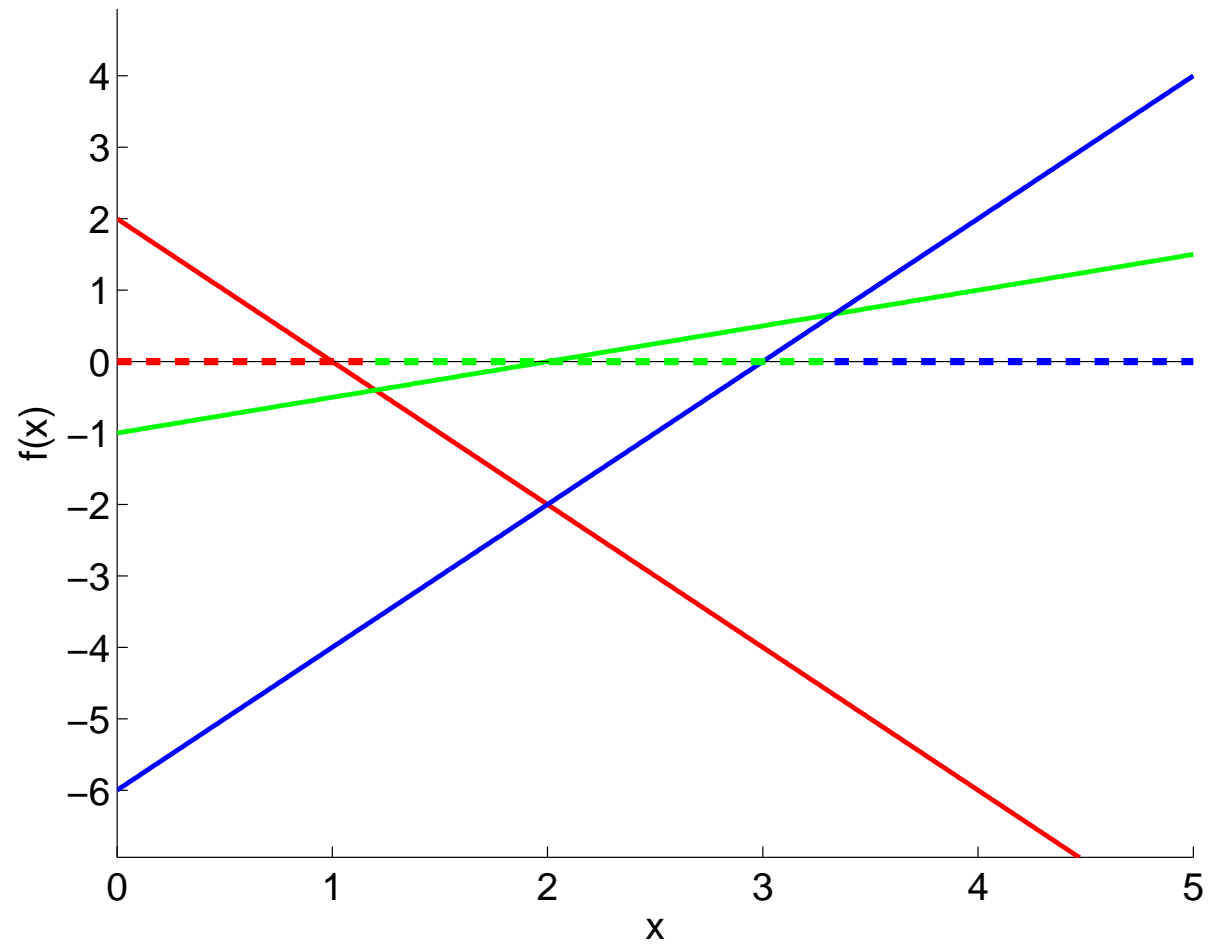
Binární klasifikace

Diskriminační funkce: příklady

Druhy diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce



Druhy diskriminační funkce

Úvod: Diskriminační funkce

Binární klasifikace
Diskriminační funkce:
příklady

Druhy diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Diskriminační funkce může mít podobu:

- ✓ jakékoli matematické funkce (lineární, kvadratická, polynomiální, ...),
- ✓ matematického modelu v jiné formě (uvnitř neuronové sítě, v rámci support vector machine, ...),
- ✓ atd.

Lineární:

$$f(\mathbf{x}) = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_Dx_D + w_0 \quad (1)$$

Vektorově:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0 \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_D)^T \\ \mathbf{w} &= (w_1, w_2, \dots, w_D)^T \end{aligned}$$

Vektorově (homogenní souřadnice):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{w}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_D, 1)^T \\ \mathbf{w} &= (w_1, w_2, \dots, w_D, w_0)^T \end{aligned}$$

Učení lineární diskriminační funkce

Úvod: Diskriminační funkce

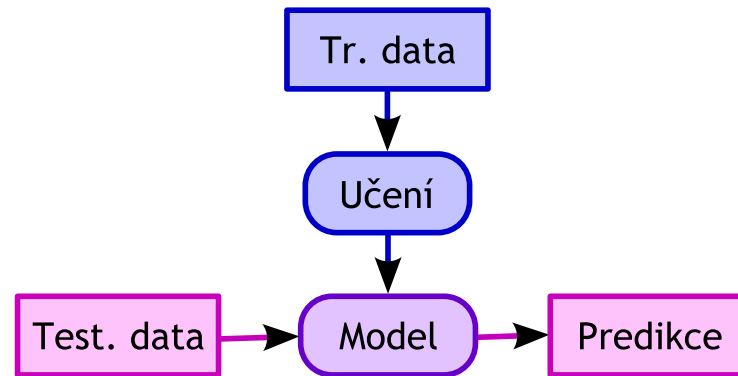
Binární klasifikace
Diskriminační funkce:
příklady

Druhy diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

1. Jak získat predikce, když známe model?
2. Jak získat model, když známe trénovací data?



Učení lineární diskriminační funkce

Úvod: Diskriminační funkce

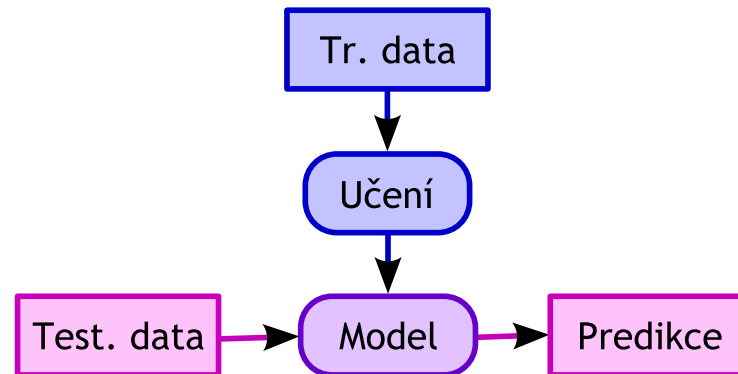
Binární klasifikace
Diskriminační funkce:
příklady

Druhy diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

1. Jak získat predikce, když známe model?
2. Jak získat model, když známe trénovací data?



1. Jak *učit* lineární diskriminační funkci z trénovacích dat?
 - ✓ Perceptronový algoritmus
 - ✓ Optimální rozdělovací nadplocha
2. Když lineární funkce nestačí...
 - ✓ Rozšíření báze
 - ✓ Support vector machine
 - ✓ AdaBoost

Úvod: Diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Perceptron

Demo: perceptron

Vlastnosti perceptronového algoritmu

Nadplocha nalezená perceptronem

Příště:

Učení lineární diskriminační funkce

Perceptronový algoritmus

Úvod: Diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Perceptron

Demo: perceptron

Vlastnosti perceptronového algoritmu

Nadplocha nalezená perceptronem

Příště:

Perceptron [Ros62]:

- ✓ jednoduchý model neuronu
- ✓ lineární klasifikátor (klasifikátor s lineární diskriminační funkcí)
- ✓ perceptronový algoritmus je jeden z mnoha algoritmů učení lineární diskř. funkce (další jsou např. lineární diskř. analýza, Fisherova diskř. analýza, SVM s lineárním jádrem, ...)

Algoritmus 1: Perceptronový algoritmus

Vstup: Lineárně separabilní množina ohodnocených trénovacích bodů: $\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathcal{R}^{D+1}$ (homogenní souřadnice), $y_i \in \{+1, -1\}$

Výstup: Váhový vektor \mathbf{w} takový, že $\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i > 0$ iff $y_i = +1$ a $\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i < 0$ iff $y_i = -1$

```
1 begin
2   Inicializuj váhový vektor, např.  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ .
3   Invertuj body ve 2. třídě:  $\mathbf{x}_i = -\mathbf{x}_i$  pro všechna  $i$ , kde  $y_i = -1$ .
4   Najdi špatně zaklasifikovaný trénovací vektor, tj. najdi  $j$ , pro které  $\mathbf{w}^T \mathbf{x}_j \leq 0$ , např. nejhůře
   zaklasifikovaný vektor:  $\mathbf{x}_j = \arg \min_{\mathbf{x}_i} (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i)$ .
5   if neexistuje špatně zaklasifikovaný bod then
6     | Vektor  $\mathbf{w}$  je řešením. Konec.
7   else
8     | Uprav váhový vektor:  $\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{x}_j$ .
9
10  | Pokračuj krokem 4.
```

[Ros62] Frank Rosenblatt. *Principles of Neurodynamics: Perceptron and the Theory of Brain Mechanisms*. Spartan Books, Washington, D.C., 1962.

Demo: perceptron

Úvod: Diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

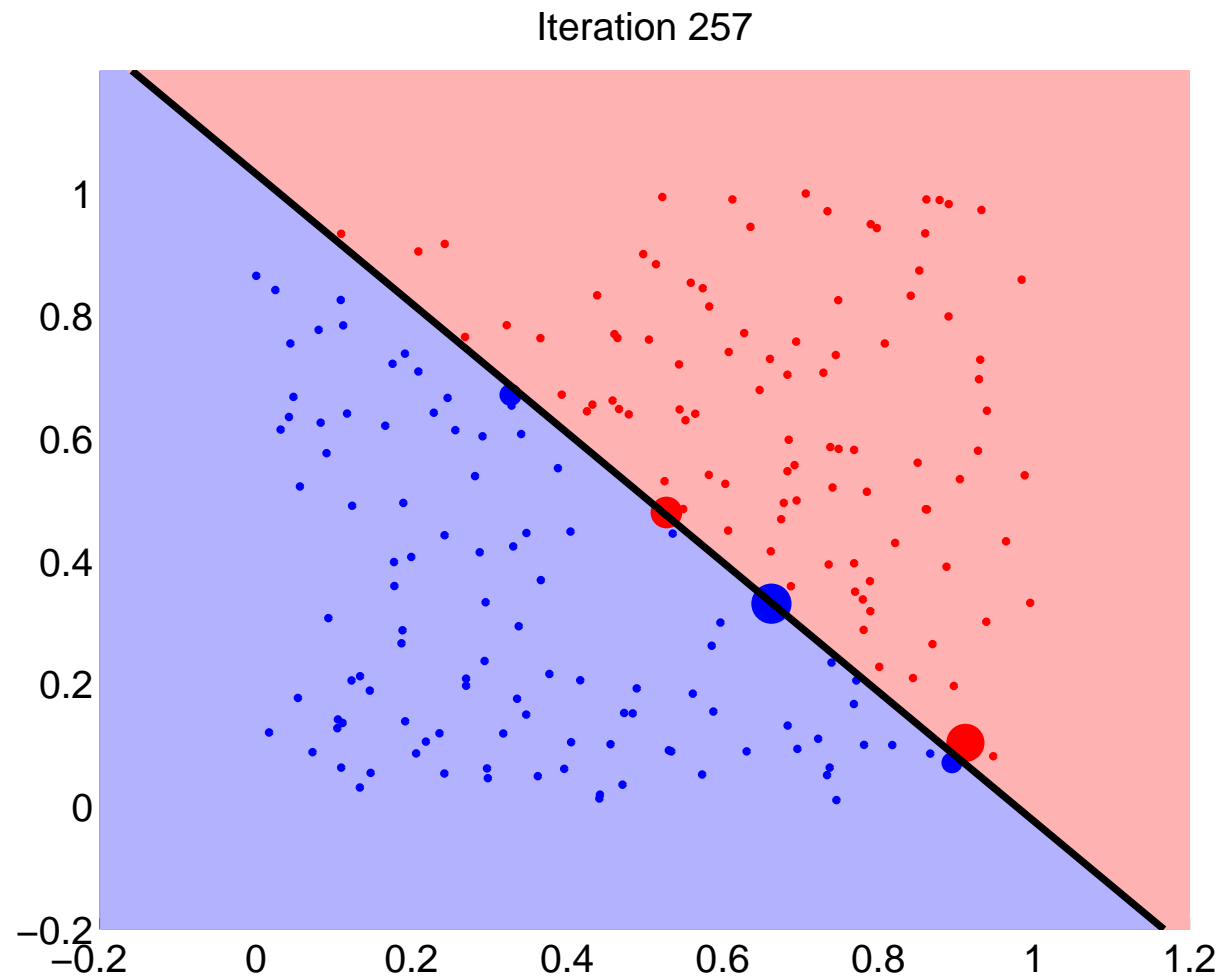
Perceptron

Demo: perceptron

Vlastnosti perceptronového algoritmu

Nadplocha nalezená perceptronem

Příště:



Vlastnosti perceptronového algoritmu

Úvod: Diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Perceptron

Demo: perceptron

Vlastnosti perceptronového algoritmu

Nadplocha nalezená perceptronem

Příště:

Věta o konvergenci perceptronu [Nov62]:

- ✓ *Perceptronový algoritmus nalezne lineární nadplochu oddělující dvě třídy bodů za předpokladu, že taková nadplocha existuje.*

Věta o zacyklení perceptronu:

- ✓ *Pokud oddělující nadplocha neexistuje, algoritmus nemusí konvergovat (a bude iterovat donekonečna).*

Možná řešení:

- ✓ Pocket algorithm - sledovat chybu, jakou perceptron v každé iteraci dělá, a udržovat váhy s nejmenší dosud nalezenou chybou v oddělené paměti.
- ✓ K učení lineárního klasifikátoru použít algoritmus, který najde alespoň přibližné řešení, pokud třídy lineárně separovatelné nejsou.

[Nov62] Albert B. J. Novikoff. On convergence proofs for perceptrons. In *Proceedings of the Symposium on Mathematical Theory of Automata*, volume 12, Brooklyn, New York, 1962.

Nadplocha nalezená perceptronem

Úvod: Diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Perceptron

Demo: perceptron

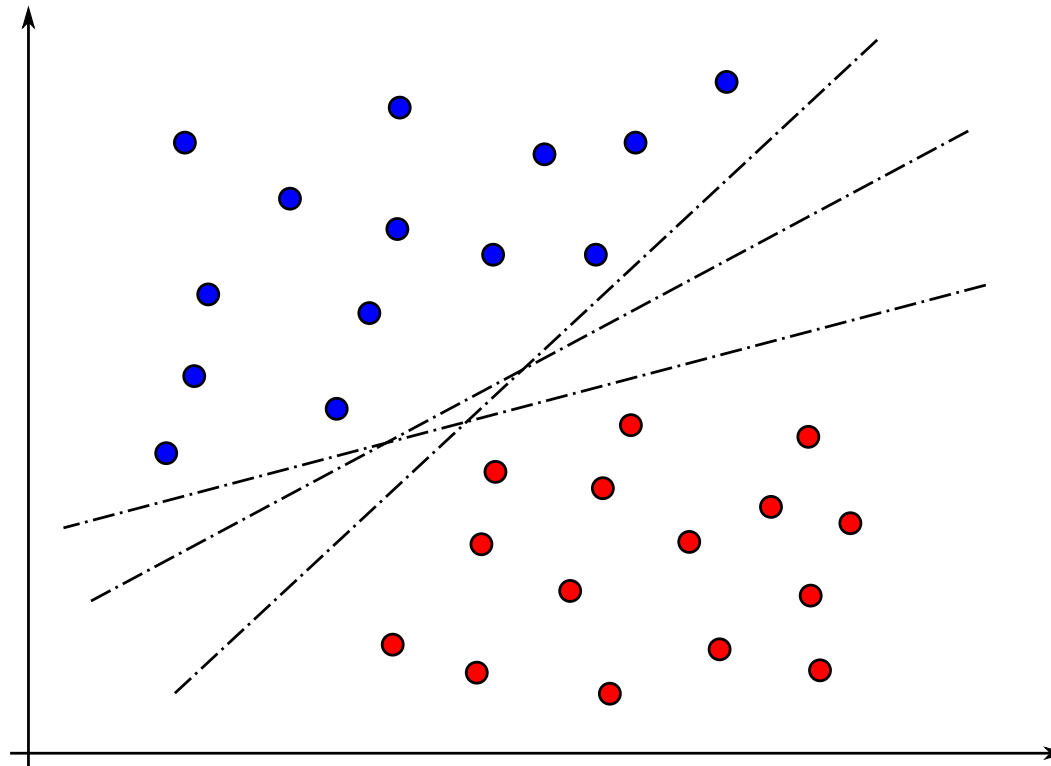
Vlastnosti perceptronového algoritmu

Nadplocha nalezená perceptronem

Příště:

Perceptronový algoritmus pro lineárně separabilní data

- ✓ najde rozdělující nadplochu, pokud existuje
- ✓ pokud existuje jedna nadplocha, existuje jich nekonečně mnoho



- ✓ najde *jakoukoliv* rozdělující nadplochu!

Která z nekonečného množství rozdělujících nadploch je optimální?

Příště:

Úvod: Diskriminační funkce

Učení lineární diskriminační funkce

Perceptron

Demo: perceptron

Vlastnosti perceptronového algoritmu

Nadplocha nalezená perceptronem

Příště:

- ✓ Optimální rozdělující nadplocha
- ✓ Co když lineární hranice nestačí?
 - ✗ Rozšíření báze
 - ✗ Kernel trik
 - ✗ Adaboost

Dotazy?