



ERA

Identifikace systémů

Markovovy parametry

Motivace

- Kvalita řízení závisí na přesnosti použitého modelu
- Analytické modely, např. z MKP, nemusí být dostatečně přesné, což může stačit pro simulace, ale ne pro reálný systém.
- Lepší (reálný) model → identifikace z naměřených dat
- ERA – Eigensystem Realization Algorithm
- Není třeba nastavovat žádné parametry podle použitého modelu
- Určuje potřebný řád systému
- Příliš nízký řád → nepostihne část dynamiky
- Příliš vysoký řád → výpočtově náročné, prostřednictvím zpětné vazby může vnést nežadoucí dynamiku

Diskrétní systém

- Digitální I/O záznamy \rightarrow diskrétní systém

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i,$$

$$y_i = Cx_i + Du_i.$$

- s ... počet vstupů, r ... počet výstupů, p ... řád systému
- Matice říditelnosti (dosažitelnosti) a pozorovatelnosti:

$$C_p = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{p-1}B \end{bmatrix} \quad O_p = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix}$$

- Gramián říditelnosti a pozorovatelnosti:

$$W_c(p) = C_p C_p^T$$

$$W_o(p) = O_p^T O_p$$

Markovovy parametry

- Impulzová odezva: $u_0 = 1$, $u_i = 0$ $i = 1, 2, 3, 4, \dots$

- Počáteční podmínky: $x_0 = 0$

- \rightarrow
 - $x_0 = 0,$
 - $y_0 = Du_0 = D,$
 - $x_1 = Ax_0 + Bu_0 = B,$
 - $y_1 = Cx_1 + Du_1 = CB,$
 - $x_2 = Ax_1 + Bu_1 = AB,$
 - $y_2 = Cx_2 + Du_2 = CAB,$
 - $x_3 = Ax_2 + Bu_2 = A^2B,$
 - $y_3 = Cx_3 + Du_3 = CA^2B,$
 - \vdots
 - $x_k = Ax_{k-1} + Bu_k = A^{k-1}B,$
 - $y_k = Cx_k + Du_k = CA^{k-1}B.$

Markovovy parametry

- Impulzová odezva: $u_0 = 1$, $u_i = 0$ $i = 1, 2, 3, 4, \dots$

- Počáteční podmínky: $x_0 = 0$

- \rightarrow
 - $x_0 = 0,$
 - $y_0 = Du_0 = D,$
 - $x_1 = Ax_0 + Bu_0 = B,$
 - $y_1 = Cx_1 + Du_1 = CB,$
 - $x_2 = Ax_1 + Bu_1 = AB,$
 - $y_2 = Cx_2 + Du_2 = CAB,$
 - $x_3 = Ax_2 + Bu_2 = A^2B,$
 - $y_3 = Cx_3 + Du_3 = CA^2B,$
 - \vdots
 - $x_k = Ax_{k-1} + Bu_k = A^{k-1}B,$
 - $y_k = Cx_k + Du_k = CA^{k-1}B.$

Obecně:

v čase $t = k\Delta t$

je odezva $y_k = CA^{k-1}B$

Markovovy parametry

- Impulzová odezva: $u_0 = 1$, $u_i = 0$ $i = 1,2,3,4,\dots$

- Počáteční podmínky: $x_0 = 0$

- \rightarrow
 $x_0 = 0,$
 $y_0 = Du_0 = D,$
 $x_1 = Ax_0 + Bu_0 = B,$
 $y_1 = Cx_1 + Du_1 = CB,$
 $x_2 = Ax_1 + Bu_1 = AB,$
 $y_2 = Cx_2 + Du_2 = CAB,$
 $x_3 = Ax_2 + Bu_2 = A^2B,$
 $y_3 = Cx_3 + Du_3 = CA^2B,$
 \vdots
 $x_k = Ax_{k-1} + Bu_k = A^{k-1}B,$
 $y_k = Cx_k + Du_k = CA^{k-1}B.$

Obecně:

v čase $t = k\Delta t$

je odezva $y_k = CA^{k-1}B$

**Markovovy
parametry**

$$h_k = CA^{k-1}B$$

$k = 1,2,3,\dots$

Markovovy (matice) parametry

$$h_k = CA^k B$$

- i -tý sloupec = odezva v čase $k\Delta t$ na jednotkový impuls na i -tém vstupu
- Často lze přímo změřit nebo získat z I/O měření
- Hankelovy matice

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_p \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_p & h_{p+1} & \cdots & h_{2p-1} \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \cdots & h_{p+1} \\ h_3 & h_4 & \cdots & h_{p+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{p+1} & h_{p+2} & \cdots & h_{2p} \end{bmatrix}$$

Markovovy (matice) parametry

$$h_k = CA^k B$$

- i -tý sloupec = odezva v čase $k\Delta t$ na jednotkový impuls na i -tém vstupu
- Často lze přímo změřit nebo získat z I/O měření
- Hankelovy matice

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_p \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_p & h_{p+1} & \cdots & h_{2p-1} \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \cdots & h_{p+1} \\ h_3 & h_4 & \cdots & h_{p+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{p+1} & h_{p+2} & \cdots & h_{2p} \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \mathcal{O}_p \mathcal{C}_p$$

$$H_2 = \mathcal{O}_p A \mathcal{C}_p$$

Identifikace

- Při identifikaci nemáme C_p a O_p , ale máme H_1, H_2
- Zavedení matic P,Q

$$H_1 = PQ$$

$$H_2 = PAQ$$

- Jestli mají P,Q plnou hodnost, tak platí:

$$A = P^+ H_2 Q^+$$

- Pokud takto získáme A:
 - B určíme jako první sloupeček z Q
 - C určíme jako první řádek z P

Identifikace

- Dekompozice H_1 není jednoznačná
- Pro vyvážený stavový model je vhodný SVD rozklad

$$H_1 = V\Gamma^2U^T \quad \Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$$

$$UU^T = I$$

$$V^TV = I$$

$$Q = \Gamma U^T$$

$$P = V\Gamma$$

$$W_c(p) = QQ^T = \Gamma^2$$

$$W_o(p) = P^T P = \Gamma^2$$

- Vzniklý systém, je říditelný a pozorovatelný
- Hůře pozorovatelné stavy stejně vynecháme (šum)
→ Tím je určen potřebný řád systému