

Rekurze

Jan Faigl

Katedra počítačů

Fakulta elektrotechnická

České vysoké učení technické v Praze

Přednáška 6

A0B36PR1 – Programování 1



Část 1 – Rekurze

Faktoriál

Obrácený výpis

Karel

Hanojské věže

Rekurze

Fibonacciho posloupnost



Část 2 – Příklady

Eratostenovo síto

Řazení



Část I

Rekurze



Obsah

Faktoriál

Obrácený výpis

Karel

Hanojské věže

Rekurze

Fibonacciho posloupnost



Výpočet faktoriálu

■ Iterace

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$$

```
int factorialI(int n) {  
    int f = 1;  
    for(; n > 1; --n) {  
        f *= n;  
    }  
    return f;  
}
```

■ Rekurze

$$n! = 1 \text{ pro } n \leq 1$$

$$n! = n(n-1)! \text{ pro } n > 1$$

```
int factorialR(int n) {  
    int f = 1;  
    if (n > 1) {  
        f = n * factorialR(n-1);  
    }  
    return f;  
}
```

lec05/DemoFactorial.java

Přípomínka



Výpočet faktoriálu

■ Iterace

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$$

```
int factorialI(int n) {  
    int f = 1;  
    for(; n > 1; --n) {  
        f *= n;  
    }  
    return f;  
}
```

■ Rekurze

$$n! = 1 \text{ pro } n \leq 1$$

$$n! = n(n-1)! \text{ pro } n > 1$$

```
int factorialR(int n) {  
    int f = 1;  
    if (n > 1) {  
        f = n * factorialR(n-1);  
    }  
    return f;  
}
```

lec05/DemoFactorial.java

Přípomínka



Výpočet faktoriálu

■ Iterace

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$$

```
int factorialI(int n) {  
    int f = 1;  
    for(; n > 1; --n) {  
        f *= n;  
    }  
    return f;  
}
```

■ Rekurze

$$\begin{aligned} n! &= 1 \text{ pro } n \leq 1 \\ n! &= n(n-1)! \text{ pro } n > 1 \end{aligned}$$

```
int factorialR(int n) {  
    int f = 1;  
    if (n > 1) {  
        f = n * factorialR(n-1);  
    }  
    return f;  
}
```

lec05/DemoFactorial.java

Připomínka



Obsah

Faktoriál

Obrácený výpis

Karel

Hanojské věže

Rekurze

Fibonacciho posloupnost



Příklad výpis posloupnosti 1/3

- Vytvořte program, který přečte posloupnost čísel a vypíše ji v opačném pořadí
- Rozklad problému:
 - Zavedeme abstraktní příkaz: „*obrat' posloupnost'*“
 - Příkaz rozložíme do tří kroků:
 1. Přečti číslo
číslo uložíme pro pozdější „obracený“ výpis
 2. Pokud není detekován konec posloupnost „*obrat' posloupnost'*“
pokračujeme ve čtení čísel
 3. Vypiš číslo
vypíšeme uložené číslo



Příklad výpis posloupnosti 1/3

- Vytvořte program, který přečte posloupnost čísel a vypíše ji v opačném pořadí
- Rozklad problému:
 - Zavedeme abstraktní příkaz: „*obrat' posloupnost*”
 - Příkaz rozložíme do tří kroků:
 1. Přečti číslo
číslo uložíme pro pozdější „obracený” výpis
 2. Pokud není detekován konec posloupnost „*obrat' posloupnost*”
pokračujeme ve čtení čísel
 3. Vypiš číslo
vypíšeme uložené číslo



Příklad výpis posloupnosti 2/3

```
1 void reverse() {
2     int v = scan.nextInt();
3     if (scan.hasNext()) {
4         reverse();
5     }
6     System.out.printf("%3d ", v);
7 }
8
9 public void start() {
10    System.err.println("Enter a sequence of numbers (
11    use ctr+D for the end of the the sequence");
12    reverse();
13    System.out.println(""); //end of line
14 }
```

lec06/DemoRevertSequence.java



Příklad výpis posloupnosti 3/3

■ lec06/DemoRevertSequence.java

■ Vytvoření posloupností

```
./generate_numbers.sh | tr '\n' ' ' | cat > numbers.txt
javac DemoRevertSequence.java
java DemoRevertSequence < numbers.txt 2>/dev/null > numbers-r.txt
java DemoRevertSequence <numbers-r.txt 2>/dev/null > numbers-rr.txt
```

■ Příkaz pro výpis obsahu souborů

```
for i in numbers.txt numbers-r.txt numbers-rr.txt; do
    echo "$i"; cat $i; echo ""; done
```

■ Výpis obsahu souborů

```
numbers.txt
10 4 20 8 8 5 18 6 7 7
numbers-r.txt
7 7 6 18 5 8 8 20 4 10
numbers-rr.txt
10 4 20 8 8 5 18 6 7 7
```



Příklad výpis posloupnosti 3/3

■ lec06/DemoRevertSequence.java

■ Vytvoření posloupností

```
./generate_numbers.sh | tr '\n' ' ' | cat > numbers.txt
javac DemoRevertSequence.java
java DemoRevertSequence < numbers.txt 2>/dev/null > numbers-r.txt
java DemoRevertSequence <numbers-r.txt 2>/dev/null > numbers-rr.txt
```

■ Příkaz pro výpis obsahu souborů

```
for i in numbers.txt numbers-r.txt numbers-rr.txt; do
    echo "$i"; cat $i; echo ""; done
```

■ Výpis obsahu souborů

```
numbers.txt
10 4 20 8 8 5 18 6 7 7
numbers-r.txt
7 7 6 18 5 8 8 20 4 10
numbers-rr.txt
10 4 20 8 8 5 18 6 7 7
```



Příklad výpis posloupnosti 3/3

■ lec06/DemoRevertSequence.java

■ Vytvoření posloupností

```
./generate_numbers.sh | tr '\n' ' ' | cat > numbers.txt
javac DemoRevertSequence.java
java DemoRevertSequence < numbers.txt 2>/dev/null > numbers-r.txt
java DemoRevertSequence <numbers-r.txt 2>/dev/null > numbers-rr.txt
```

■ Příkaz pro výpis obsahu souborů

```
for i in numbers.txt numbers-r.txt numbers-rr.txt; do
    echo "$i"; cat $i; echo ""; done
```

■ Výpis obsahu souborů

```
numbers.txt
10 4 20 8 8 5 18 6 7 7
numbers-r.txt
7 7 6 18 5 8 8 20 4 10
numbers-rr.txt
10 4 20 8 8 5 18 6 7 7
```



Obsah

Faktoriál

Obrácený výpis

Karel

Hanojské věže

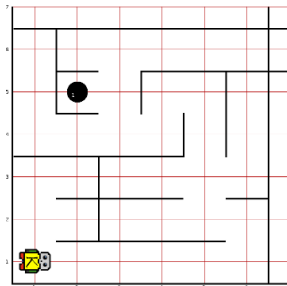
Rekurze

Fibonacciho posloupnost



Robot Karel – hledání „beeperu”

- Robot Karel má za úkol najít „beeper” v bludišti a **vrátit se s ním zpět na výchozí pozici**
- Karel se pohybuje v mřížkovém ortogonálním světě
- Karel umí:
 - jít rovně o jeden krok
 - otočit se doleva o 90°
 - vzít / položit „beeper”
 - vypnout se
- Karel umí zjistit, zdali:
 - je před ním zeď
 - na políčku, na kterém stojí, je „beeper”



Robot Karel – Iterační řešení 1/3

■ Návrh řešení

1. Jdi podél zdi (po pravé straně) dokud není na políčku „beeper“ a počítej počet kroků;
2. Seber „beeper“;
3. Otoč se a jdi podél zdi (po levé straně) a udělej stejný počet kroků jako při hledání „beeperu“;
4. Polož „beeper“ a vypni se.

■ Abstraktní příkazy pro nalezení „beeperu“ sledování zdi na pravé straně:

- Otoč se doprava: `turnRight`
- Zjistí, zda-li je na pravé straně zeď: `isWallOnRight`
- Jdi podél pravé zdi: `goByRightWall`

■ Analogické abstraktní příkazy pro pohyb podél zdi na levé straně:

- `isWallOnLeft` a `goByLeftWall`



Robot Karel – Iterační řešení 1/3

■ Návrh řešení

1. Jdi podél zdi (po pravé straně) dokud není na políčku „beeper“ a počítej počet kroků;
2. Seber „beeper“;
3. Otoč se a jdi podél zdi (po levé straně) a udělej stejný počet kroků jako při hledání „beeperu“;
4. Polož „beeper“ a vypni se.

■ Abstraktní příkazy pro nalezení „beeperu“ sledování zdi na pravé straně:

- Otoč se doprava: **turnRight**
- Zjistí, zda-li je na pravé straně zeď: **isWallOnRight**
- Jdi podél pravé zdi: **goByRightWall**

■ Analogické abstraktní příkazy pro pohyb podél zdi na levé straně:

- **isWallOnLeft** a **goByLeftWall**



Robot Karel – Iterační řešení 1/3

■ Návrh řešení

1. Jdi podél zdi (po pravé straně) dokud není na políčku „beeper“ a počítej počet kroků;
2. Seber „beeper“;
3. Otoč se a jdi podél zdi (po levé straně) a udělej stejný počet kroků jako při hledání „beeperu“;
4. Polož „beeper“ a vypni se.

■ Abstraktní příkazy pro nalezení „beeperu“ sledování zdi na pravé straně:

- Otoč se doprava: **turnRight**
- Zjistí, zda-li je na pravé straně zeď: **isWallOnRight**
- Jdi podél pravé zdi: **goByRightWall**

■ Analogické abstraktní příkazy pro pohyb podél zdi na levé straně:

- **isWallOnLeft** a **goByLeftWall**



Robot Karel – Iterační řešení 2/3

```
1 void turnRight() {
2     for (int i = 0; i < 3; i++) {
3         turnLeft();
4     }
5 }
6
7 boolean isWallOnRight() {
8     turnRight();
9     boolean out = isInFrontOfWall();
10    turnLeft();
11    return out;
12 }
13
14 void goByRightWall() {
15     while (!isOnBeeper()) {
16         if (!wallOnRight()) {
17             turnRight();
18         }
19         while (isInFrontOfWall()) {
20             turnLeft();
21         }
22         step();
23     }
24 }
```

Analogicky pro zed' po levé straně



Robot Karel – Iterační řešení 3/3

- Počet kroků je inkrementován v proceduře `step`
- Při návratu podél levé zdi Karel ujde stejný počet kroků

```
1 public void execute() {
2     goByRight();
3     pickBeeper();
4     turnAround();
5
6     if (stepsTaken > 0) {
7         goByLeft(stepsTaken);
8     }
9
10    putBeeper();
11    turnOff();
12 }
```



Robot Karel – Rekurzivní řešení 1/3

- Řešení rekurzí založíme na opakovaném volání funkce, která posune robot pouze o jeden krok vpřed a následně jej vrátí zpět ve funkci **go**:
 1. Pokud jsi na „beeperu” seber jej a otoč o 180° a ukonči hledání
 2. Zapamatuj si svou orientaci a udělej jeden krok podél pravé zdi
 3. **go** (opakuj hledání o jeden krok)
 4. Udělej jeden krok zpět (vrať se o jeden krok zpět a natoč se do původního směru)



Robot Karel – Rekurzivní řešení 2/3

```
1 void go() {
2     if (isOnBeeper()) {
3         pickBeeper();
4         turnAround(); //turn back
5         return;
6     }
7     int numberTurnRight = 0;
8     if (!isWallOnRight()) {
9         turnRight();
10        numberTurnRight++;
11    }
12
13    while (isInFrontOfWall()) {
14        turnLeft();
15        numberTurnRight--;
16    }
17    move(); //move forward
18    go();
19    move(); //move backward
20
21    numberTurnRight = (numberTurnRight + 4) % 4;
22    for (int i = 0; i < numberTurnRight; ++i) {
23        turnLeft(); //revert the turns
24    }
25 }
```



Robot Karel – Rekurzivní řešení 3/3

- Hlavní procedura obsahuje pouze volání funkce **go**, která vrací robot na výchozí políčko

```
1 void execute() {  
2     go();  
3     putBeeper();  
4     turnOff();  
5 }
```

- Pro spuštění využijeme knihovnu `KarelJRobot.jar` a modifikovaný svět `maze.klwd`

```
javac -cp lib/KarelJRobot.jar DemoKarel.java  
java -cp lib/KarelJRobot.jar:. DemoKarel
```

- Robot se při zpáteční cestě vrací „rychleji“, protože již explicitně nekontroluje, zda-li je zed' na levé straně.

[lec06/DemoKarel.java](#)



Obsah

Faktoriál

Obrácený výpis

Karel

Hanojské věže

Rekurze

Fibonacciho posloupnost



Příklad Hanojské věže



- Přemístit disky na druhou jehlu s použitím třetí (pomocné) jehly za dodržení pravidel:

1. V každém kroku můžeme přemístit pouze jeden disk a to vždy z jehly na jehlu

Disky nelze odkládat mimo jehly

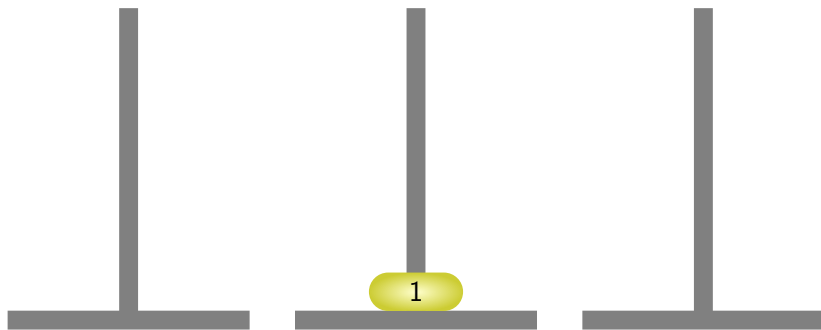
2. Položit větší disk na menší není dovoleno



Hanojské věže – 1 disk



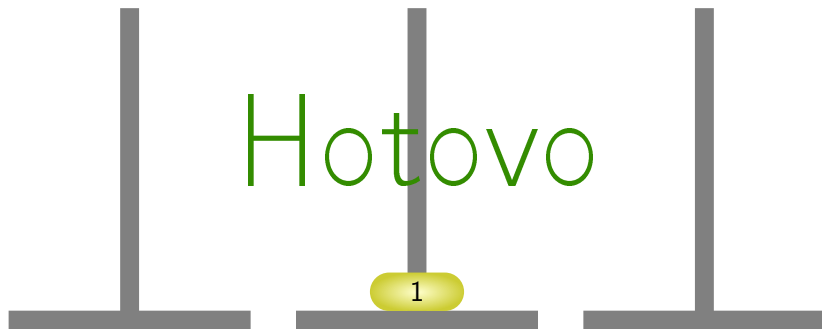
Hanojské věže – 1 disk



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 2.



Hanojské věže – 1 disk



Hanojské věže – 2 disky



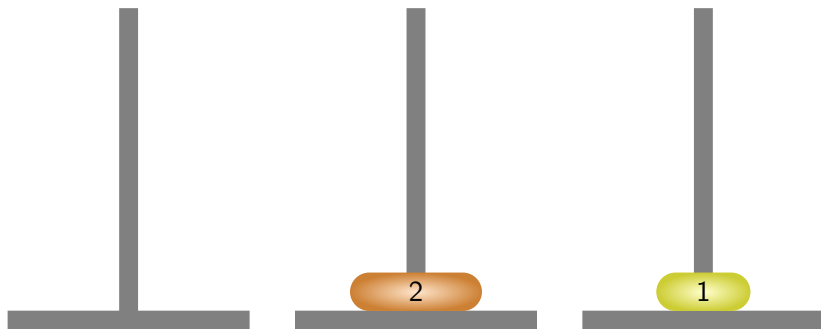
Hanojské věže – 2 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 3.



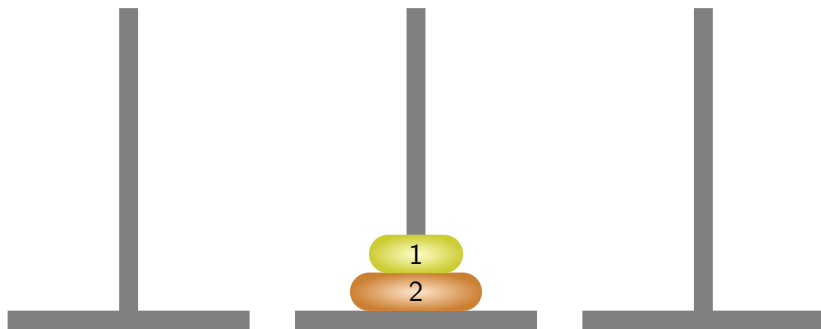
Hanojské věže – 2 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 2.



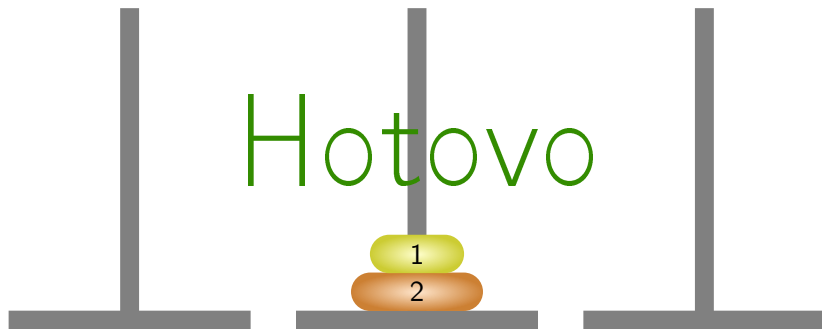
Hanojské věže – 2 disky



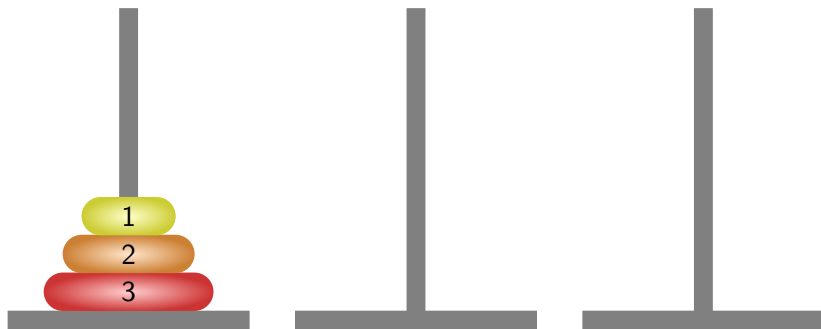
Přesunutý disk z jehly 3 na jehlu 2.



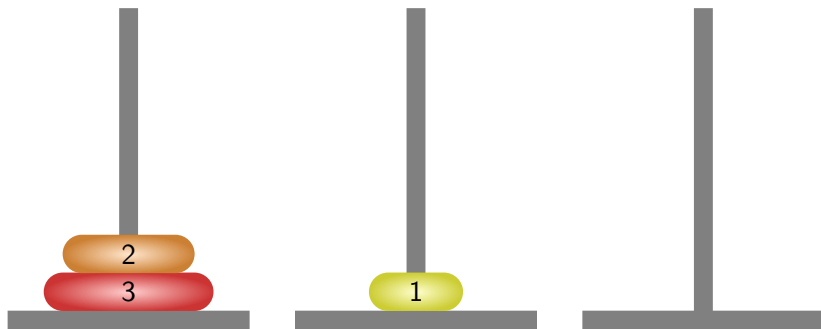
Hanojské věže – 2 disky



Hanojské věže – 3 disky



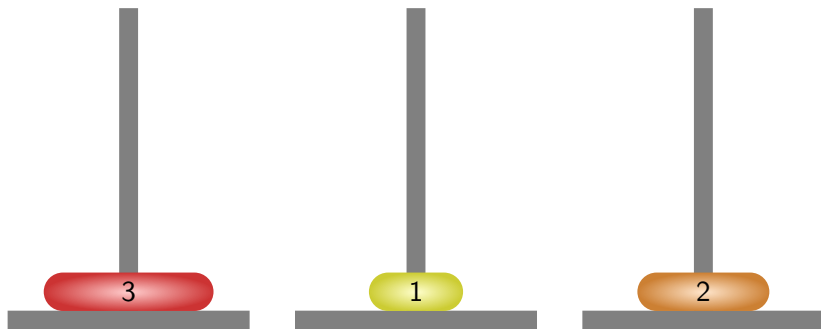
Hanojské věže – 3 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 2.



Hanojské věže – 3 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 3.



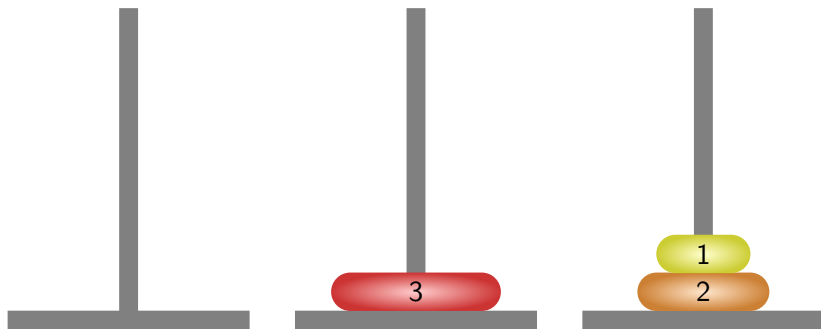
Hanojské věže – 3 disky



Přesunutý disk z jehly 2 na jehlu 3.



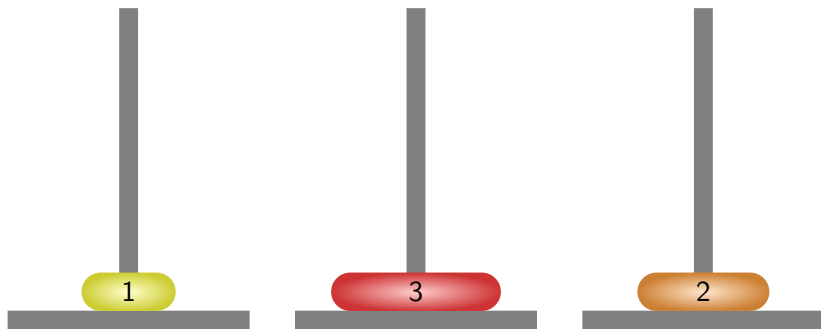
Hanojské věže – 3 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 2.



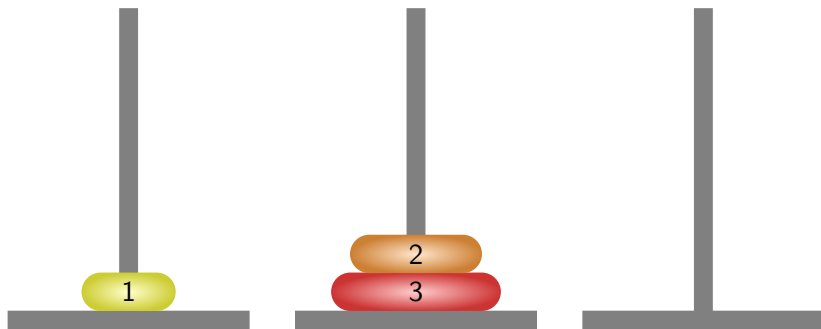
Hanojské věže – 3 disky



Přesunutý disk z jehly 3 na jehlu 1.



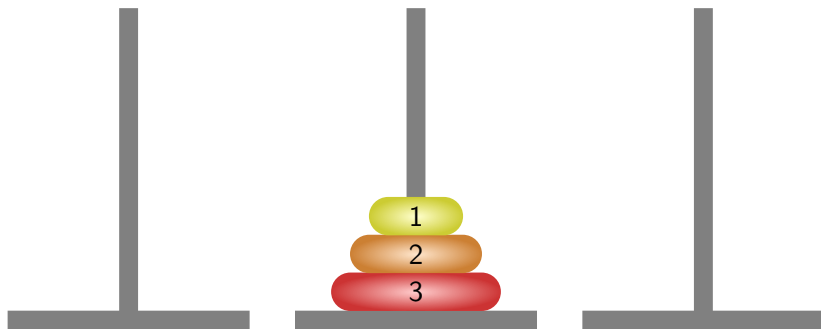
Hanojské věže – 3 disky



Přesunutý disk z jehly 3 na jehlu 2.



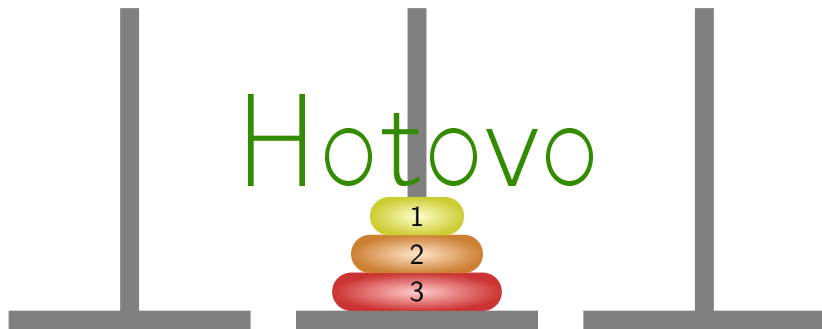
Hanojské věže – 3 disky



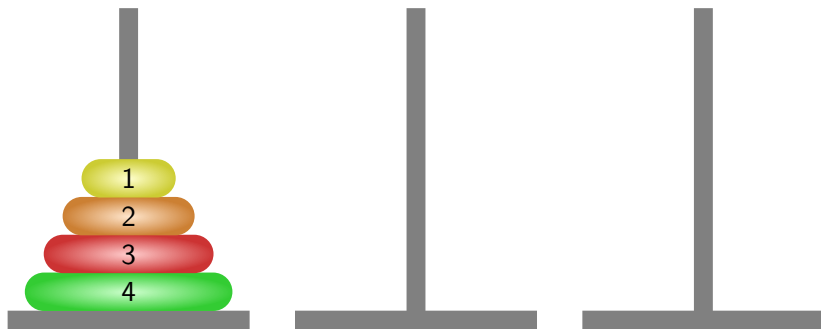
Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 2.



Hanojské věže – 3 disky



Hanojské věže – 4 disky



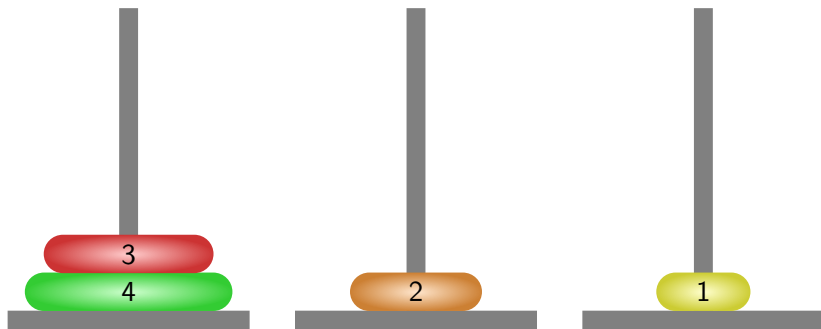
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 3.



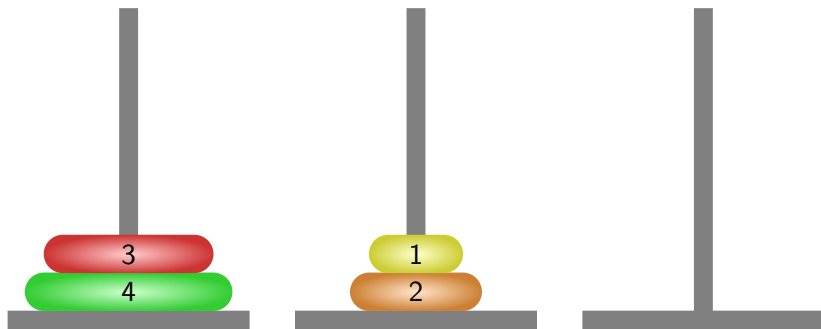
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 2.



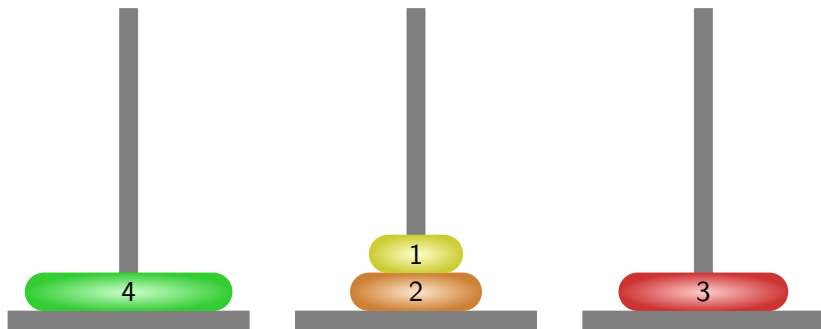
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 3 na jehlu 2.



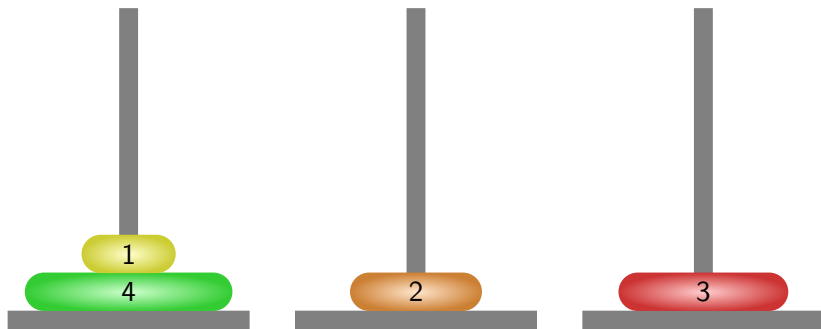
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 3.



Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 2 na jehlu 1.



Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 2 na jehlu 3.



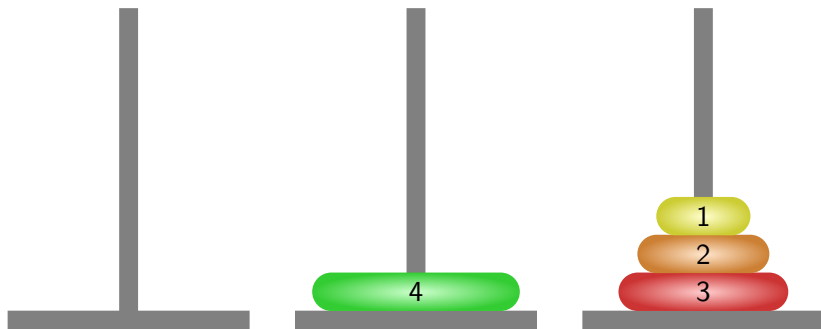
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 3.



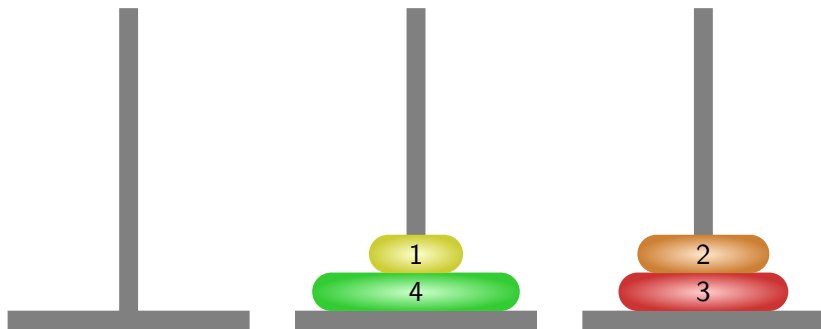
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 2.



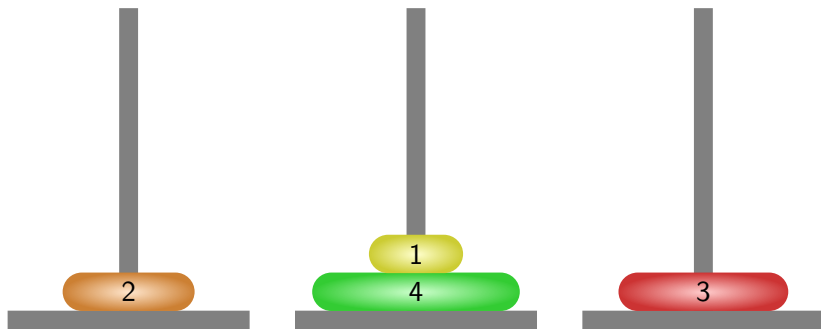
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 3 na jehlu 2.



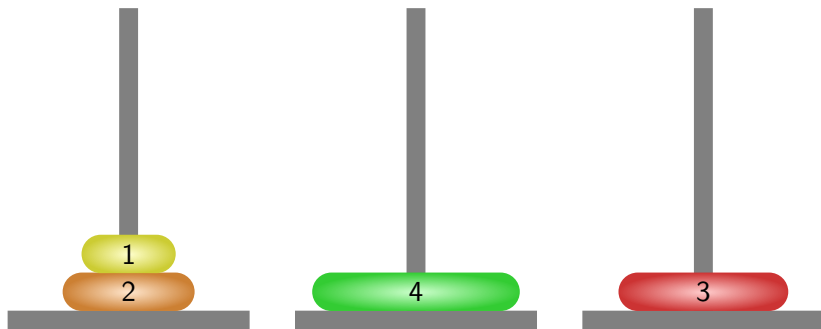
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 3 na jehlu 1.



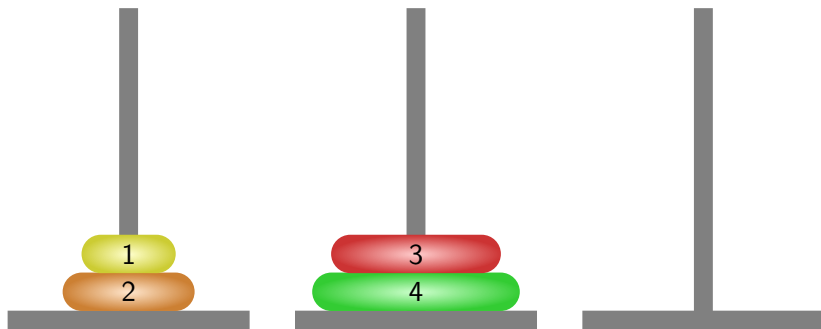
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 2 na jehlu 1.



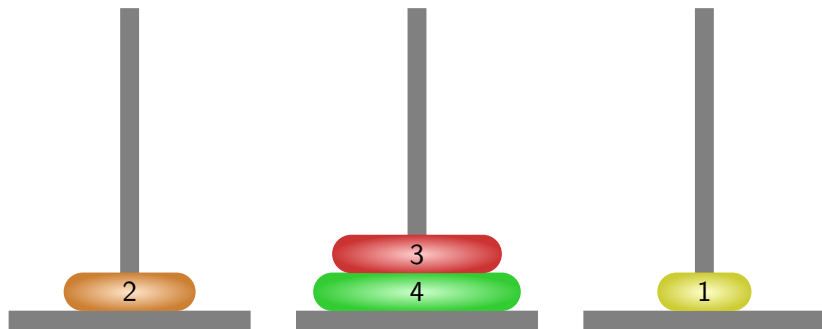
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 3 na jehlu 2.



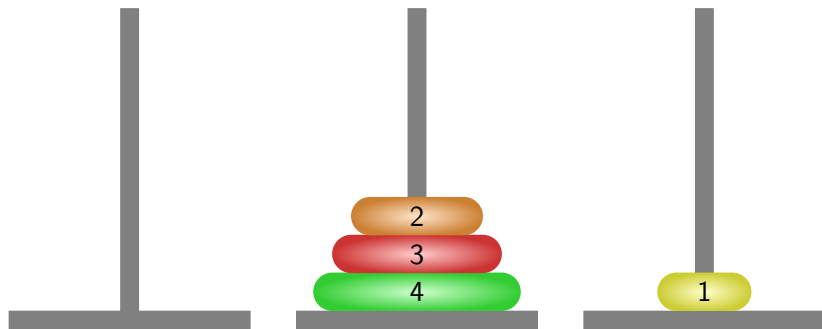
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 3.



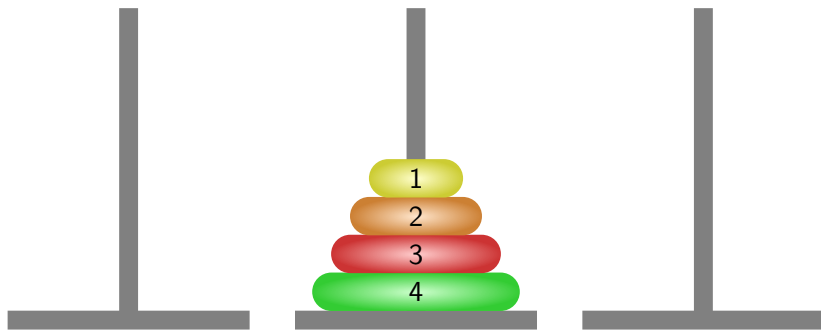
Hanojské věže – 4 disky



Přesunutý disk z jehly 1 na jehlu 2.



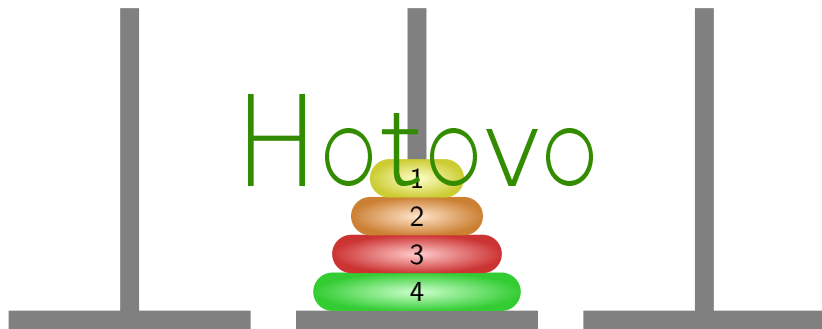
Hanojské věže – 4 disky



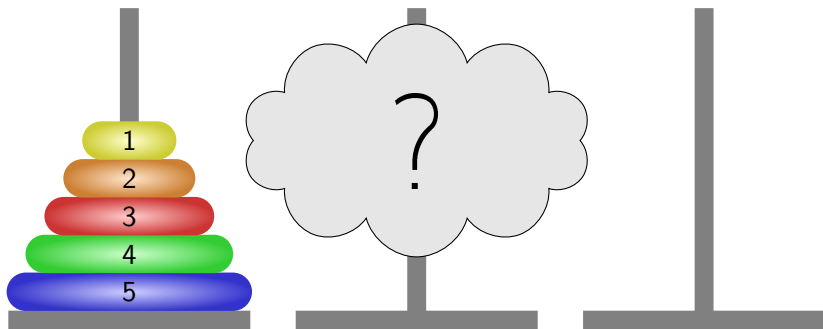
Přesunutý disk z jehly 3 na jehlu 2.



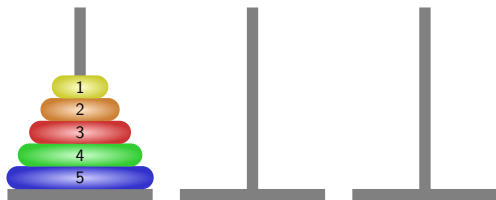
Hanojské věže – 4 disky



Hanojské věže – 5 disků



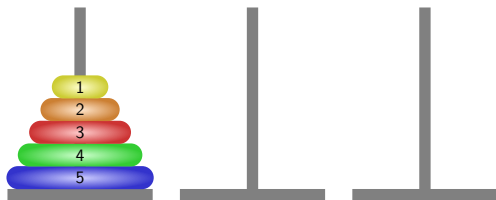
Návrh řešení



- Zavedeme abstraktní příkaz `moveTower(n, 1, 2, 3)` realizující přesun n disků z jehly 1 na jehlu 2 s použitím jehly 3.
- Pro $n > 0$ můžeme příkaz rozložit na tři jednodušší příkazy
 1. `moveTower(n-1, 1, 3, 2)`
přesun $n - 1$ disků z jehly 1 na jehlu 3
 2. „přenes disk z jehly na jehlu 2“
přesun největšího disku na cílovou pozici
abstraktní příkaz
 3. `moveTower(n-1, 3, 2, 1)`
přesun $n - 1$ disků na cílovou pozici



Návrh řešení



- Zavedeme abstraktní příkaz **moveTower(n , 1, 2, 3)** realizující přesun n disků z jehly 1 na jehlu 2 s použitím jehly 3.
- Pro $n > 0$ můžeme příkaz rozložit na tři jednodušší příkazy
 1. **moveTower($n-1$, 1, 3, 2)**
přesun $n - 1$ disků z jehly 1 na jehlu 3
 2. „*přenes disk z jehly na jehlu 2*“
přesun největšího disku na cílovou pozici
abstraktní příkaz
 3. **moveTower($n-1$, 3, 2, 1)**
přesun $n - 1$ disků na cílovou pozici



Příklad řešení

```
1 void moveTower(int n, int from, int to, int tmp) {
2     if (n > 0) {
3         moveTower(n - 1, from, tmp, to); //move to tmp
4         System.out.println("Move disc from " + from + "
5         to " + to);
6         moveTower(n - 1, tmp, to, from); //move from tmp
7     }
8 }
9 void start() {
10     int numberOfDiscs = 5;
11     moveTower(numberOfDiscs, 1, 2, 3);
12 }
```

lec06/DemoTowersOfHanoi.java



Příklad výpisu

■ lec06/DemoTowersOfHanoi.java

```
java DemoTowersOfHanoi 3
Move disc from 1 to 2
Move disc from 1 to 3
Move disc from 2 to 3
Move disc from 1 to 2
Move disc from 3 to 1
Move disc from 3 to 2
Move disc from 1 to 2
```

```
java DemoTowersOfHanoi 4
Move disc from 1 to 3
Move disc from 1 to 2
Move disc from 3 to 2
Move disc from 1 to 3
Move disc from 2 to 1
Move disc from 2 to 3
Move disc from 1 to 3
Move disc from 1 to 2
Move disc from 3 to 2
Move disc from 3 to 1
Move disc from 2 to 1
Move disc from 3 to 2
Move disc from 1 to 3
Move disc from 1 to 2
Move disc from 3 to 2
```



Obsah

Faktoriál

Obrácený výpis

Karel

Hanojské věže

Rekurze

Fibonacciho posloupnost



Rekurzivní algoritmy

- Rekurzivní funkce jsou přímou realizací rekurzivních algoritmů
- Rekurzivní algoritmus předepisuje výpočet „**shora dolů**” v závislosti na velikosti vstupních dat
 - Pro nejmenší (nejjednodušší) vstup je výpočet předepsán přímo
 - Pro obecný vstup je výpočet předepsán s využitím téhož algoritmu pro menší vstup
- Výhodou rekurzivních funkcí je jednoduchost a přehlednost



Rekurzivní vs iteračními algoritmy

- Nevýhodou rekurzivních algoritmů může být časová náročnost způsobená např. zbytečným opakováním výpočtu
- Řadu rekurzivních algoritmů lze nahradit iteračními, které počítají výsledek „**zdola nahoru**“, tj. od menších (jednodušších) vstupních dat k větším (složitějším).
- Pokud algoritmus výpočtu „**zdola nahoru**“ nenajdeme, např. při řešení problému Hanojských věží, lze rekurzivitou odstranit pomocí zásobníku.

Např. zásobník využijeme pro uložení stavu řešení problému.



Rekurze

“To iterate is human, to recurse divine.”

L. Peter Deutsch

<http://www.devtopics.com/101-great-computer-programming-quotes>



Elegance vs obtížnost rekurze

I've often heard people describe understanding recursion as one of those "got it" moments, when the universe opened its secret stores of knowledge and gifted the mind of a burgeoning developer with a very powerful tool. For me, recursion has always been hard. Each time I'm able to peer more into its murky depths, I am humbled to see how little I feel like I really appreciate and understand its power and elegance.

Rick Winfrey, 2012

<http://selfless-singleton.rickwinfrey.com/2012/11/27/to-iterate-is-human-to-recurse-divine>



Obsah

Faktoriál

Obrácený výpis

Karel

Hanojské věže

Rekurze

Fibonacciho posloupnost



Fibonacciho posloupnost

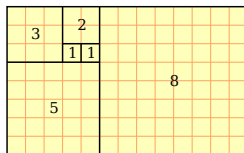
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Nebo 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

- pro $F_1 = 1, F_2 = 1$

Nebo $F_1 = 0, F_2 = 1$



- Nekonečná posloupnost přirozených čísel, kde každé číslo je součtem dvou předchozích.
- Limita poměru dvou následujících čísel Fibonacciho posloupnosti je rovna **zlatému řezu**.
 - Sectio aurea – ideální poměr mezi různými délkami
 - Rozdělení úsečky na dvě části tak, že poměr větší části ku menší je stejný jako poměr celé úsečky k větší části
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848\ \dots$$



Fibonacciho posloupnost – historie

- Indičtí matematici (450 nebo 200 BC)
- Leonardo Pisano (1175–1250) popis růstu populace králíků
 - italský matematik známý také jako Fibonacci*
 - F_n – velikost populace po n měsících za předpokladu
 - První měsíc se narodí jediný pár.
 - Narozené páry jsou produktivní od 2. měsíce svého života.
 - Každý měsíc zplodí každý produktivní pár jeden další pár.
 - Králíci nikdy neumírají, nejsou nemocní atd.
- Henry E. Dudeney (1857–1930) – popis populace krav
 - „Jestliže každá kráva vyprodukuje své první tele (jalovici) za rok a poté každý rok jednu další jalovici, kolik budete mít krav za 12 let, jestliže žádná nezemře a na počátku budete mít jednu krávu?
Po 12 let je k dispozici jeden či více býků



Fibonacciho posloupnost – historie

- Indičtí matematici (450 nebo 200 BC)
- Leonardo Pisano (1175–1250) popis růstu populace králíků
 - italský matematik známý také jako Fibonacci*
 - F_n – velikost populace po n měsících za předpokladu
 - První měsíc se narodí jediný pár.
 - Narozené páry jsou produktivní od 2. měsíce svého života.
 - Každý měsíc zplodí každý produktivní pár jeden další pár.
 - Králíci nikdy neumírají, nejsou nemocní atd.
- Henry E. Dudeney (1857–1930) – popis populace krav
 - „Jestliže každá kráva vyprodukuje své první tele (jalovici) za rok a poté každý rok jednu další jalovici, kolik budete mít krav za 12 let, jestliže žádná nezemře a na počátku budete mít jednu krávu?
Po 12 let je k dispozici jeden či více býků



Fibonacciho posloupnost – rekurzivně

- Platí:

$$f_0 = 1$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ pro } n > 1$$

```
1 int fibonacci(int n) {  
2     return n < 2  
3         ? 1  
4         : fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2);  
5 }
```

Zápis je elegantní, jak je však takový výpočet efektivní?



Fibonacciho posloupnost – rekurzivně

- Platí:

$$f_0 = 1$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ pro } n > 1$$

```
1 int fibonacci(int n) {  
2     return n < 2  
3         ? 1  
4         : fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2);  
5 }
```

Zápis je elegantní, jak je však takový výpočet efektivní?



Fibonacciho posloupnost – příklad 1/2

- Počet operací při výpočtu Fibonacciho čísla n

```
1 long counter;
2
3 long fibonacciRecursive(int n) {
4     counter++;
5     return n < 2
6         ? 1
7         : fibonacciRecursive(n-1) + fibonacciRecursive(n-2);
8 }
9
10 long fibonacciIterative(int n) {
11     long fibM2 = 1l;
12     long fibM1 = 1l;
13     long fib = 1l;
14     for (int i = 2; i <= n; ++i) {
15         fibM2 = fibM1;
16         fibM1 = fib;
17         fib = fibM1 + fibM2;
18         counter += 3;
19     }
20     return fib;
21 }
```

lec06/DemoFibonacci.java



Fibonacciho posloupnost – rekurzivně 2/2

```
1 public void start(String[] args) {
2     int n = args.length > 0 ? Integer.parseInt(args[0]) : 25;
3     counter = 0;
4     long fibR = fibonnaciR(n);
5     long counteR = counter;
6
7     counter = 0;
8     long fibI = fibonnaciI(n);
9     long counteI = counter;
10
11     System.out.println("Fibonacci number recursive: " + fibR);
12     System.out.println("Fibonacci number iteration: " + fibI);
13     System.out.println("Counter recursive: " + counteR);
14     System.out.println("Counter recursive: " + counteI);
15 }
```

lec06/DemoFibonacci.java

```
javac DemoFibonacci.java
java DemoFibonacci 30
```

```
Fibonacci number recursive: 1346269
Fibonacci number iteration: 1346269
Counter recursive: 2692537
Counter iteration: 8
```



Fibonacciho posloupnost – rekurzivně vs iteračně

- Rekurzivní výpočet
 - Složitost roste exponenciálně s $n \sim 2^n$
- Iterační algoritmus
 - Počet operací je proporcionální $n \sim 3n$

`lec06/DemoFibonacciStats.java`, `lec06/fibonacci.sh`

- Skutečný počet operací závisí na konkrétní implementaci, programovacím jazyku, překladači a hardware
- Složitost algoritmů proto vyjadřujeme asymptoticky jako funkci velikosti vstupu
 - Například v tzv. „Big O” notaci
 - rekurzivní algoritmus výpočtu má složitost $O(2^n)$
 - iterační algoritmus výpočtu má složitost $O(n)$

Efektivní algoritmy mají polynomiální složitost



Fibonacciho posloupnost – rekurzivně vs iteračně

- Rekurzivní výpočet

- Složitost roste exponenciálně s $n \sim 2^n$

- Iterační algoritmus

- Počet operací je proporcionální $n \sim 3n$

`lec06/DemoFibonacciStats.java`, `lec06/fibonacci.sh`

- Skutečný počet operací závisí na konkrétní implementaci, programovacím jazyku, překladači a hardware

- Složitost algoritmů proto vyjadřujeme asymptoticky jako funkci velikosti vstupu

- Například v tzv. „Big O” notaci

- rekurzivní algoritmus výpočtu má složitost $O(2^n)$
- iterační algoritmus výpočtu má složitost $O(n)$

Efektivní algoritmy mají polynomiální složitost



Část II

Příklady



Obsah

Eratostenovo síto

Řazení



Pole reprezentující množinu prvočísel

- Vypsát všechna prvočísla menší nebo rovna zadané hodnotě \max
- Algoritmus:
 1. Vytvoříme množinu obsahující všechna přirozená čísla od 2 do \max
 2. Z množiny vypustíme násobky čísla 2
 3. Najdeme nejbližší číslo k tomu, jehož násobky jsme v předchozím kroku vypustili, a vypustíme všechny násobky tohoto čísla
 4. Opakujeme krok 3, dokud číslo, jehož násobky jsme vypustili, není větší než odmocnina z \max
 5. Čísla, která v množině zůstanou, jsou hledaná prvočísla
- Pro reprezentaci množiny čísel použijeme pole prvků typu `boolean`, kde prvek pole `sieve[i]` udává, zda-li je celé číslo i v množině (`true`) nebo není (`false`), tj. zda-li je nebo není prvočíslem



Pole reprezentující množinu prvočísel

- Vypsát všechna prvočísla menší nebo rovna zadané hodnotě \max
- Algoritmus:
 1. Vytvoříme množinu obsahující všechna přirozená čísla od 2 do \max
 2. Z množiny vypustíme násobky čísla 2
 3. Najdeme nejbližší číslo k tomu, jehož násobky jsme v předchozím kroku vypustili, a vypustíme všechny násobky tohoto čísla
 4. Opakujeme krok 3, dokud číslo, jehož násobky jsme vypustili, není větší než odmocnina z \max
 5. Čísla, která v množině zůstanou, jsou hledaná prvočísla
- Pro reprezentaci množiny čísel použijeme pole prvků typu `boolean`, kde prvek pole `sieve[i]` udává, zda-li je celé číslo i v množině (`true`) nebo není (`false`), tj. zda-li je nebo není prvočíslem



Pole reprezentující množinu prvočísel

- Vypsát všechna prvočísla menší nebo rovna zadané hodnotě \max
- Algoritmus:
 1. Vytvoříme množinu obsahující všechna přirozená čísla od 2 do \max
 2. Z množiny vypustíme násobky čísla 2
 3. Najdeme nejbližší číslo k tomu, jehož násobky jsme v předchozím kroku vypustili, a vypustíme všechny násobky tohoto čísla
 4. Opakujeme krok 3, dokud číslo, jehož násobky jsme vypustili, není větší než odmocnina z \max
 5. Čísla, která v množině zůstanou, jsou hledaná prvočísla
- Pro reprezentaci množiny čísel použijeme pole prvků typu `boolean`, kde prvek pole `sieve[i]` udává, zda-li je celé číslo i v množině (`true`) nebo není (`false`), tj. zda-li je nebo není prvočíslem



Eratosthenovo síto 1/2

```
1 boolean[] createSieve(int max) {
2     boolean[] sieve = new boolean[max + 1];
3     for (int i = 2; i <= max; ++i) {
4         sieve[i] = true;
5     }
6     int p = 2;
7     int pmax = (int)Math.sqrt(max);
8     do {
9         for(int i = p + p; i <= max; i += p) {
10            sieve[i] = false;
11        }
12        do {
13            p++;
14        } while (!sieve[p]);
15    } while (p <= pmax);
16    return sieve;
17 }
```

lec06/DemoSieveOfEratosthenes.java



Eratosthenovo síto 2/2

```
1 void print(boolean[] sieve) {
2     for(int i = 2; i < sieve.length; ++i) {
3         if (sieve[i]) {
4             System.out.print(i + " ");
5         }
6     }
7 }
8
9 void start(int max) {
10    boolean[] sieve = createSieve(max);
11    System.out.print("Prime numbers from 2 to " + max + ":
12    ");
13    print(sieve);
14    System.out.println("");
15 }
```

```
javac DemoSieveOfEratosthenes.java
```

```
java DemoSieveOfEratosthenes
```

```
Prime numbers from 2 to 100: 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31
37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97
```

```
java DemoSieveOfEratosthenes 30
```

```
Prime numbers from 2 to 40: 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29
```

```
lec06/DemoSieveOfEratosthenes.java
```



Obsah

Eratostenovo síto

Řazení



Řazení pole

- Problém seřadit množinu prvků podle klíče (celého čísla)
- Posloupnost prvků $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$
- Délka posloupnosti q je $|q| = n$
- Posloupnost q je seřazená, právě tehdy když
 - $|q| < 2$
 - $|q| \geq 2$ **klíč**(a_1) \leq **klíč**(a_2) a posloupnost $\langle a_2, \dots \rangle$ neobsahuje prvek a_1 .
- Řazení polí je řazením na místě

Pro jednoduchost v příkladech třídíme jen celá čísla, prakticky však zpravidla třídíme klíče datových položek.



Řazení pole

- Problém seřadit množinu prvků podle klíče (celého čísla)
- Posloupnost prvků $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$
- Délka posloupnosti q je $|q| = n$
- Posloupnost q je seřazená, právě tehdy když
 - $|q| < 2$
 - $|q| \geq 2$ **klíč**(a_1) \leq **klíč**(a_2) a posloupnost $\langle a_2, \dots \rangle$ neobsahuje prvek a_1 .
- Řazení polí je řazením na místě

Pro jednoduchost v příkladech třídíme jen celá čísla, prakticky však zpravidla třídíme klíče datových položek.



Třídění přímým vkládáním – Insert Sort 1/2

Příklad - Třídění přímým vkládáním

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>					
44		55		12		42		94		18

1

2

3

4

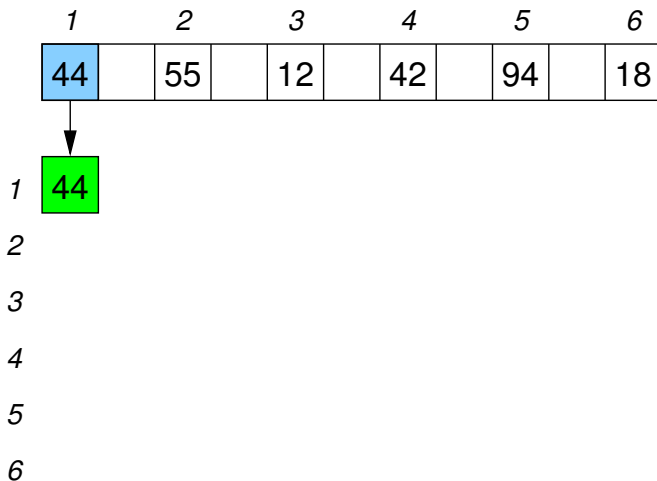
5

6



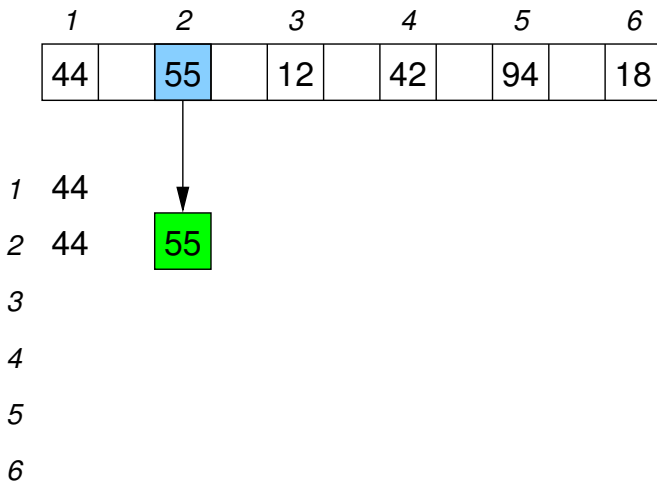
Třídění přímým vkládáním – Insert Sort 1/2

Příklad - Třídění přímým vkládáním



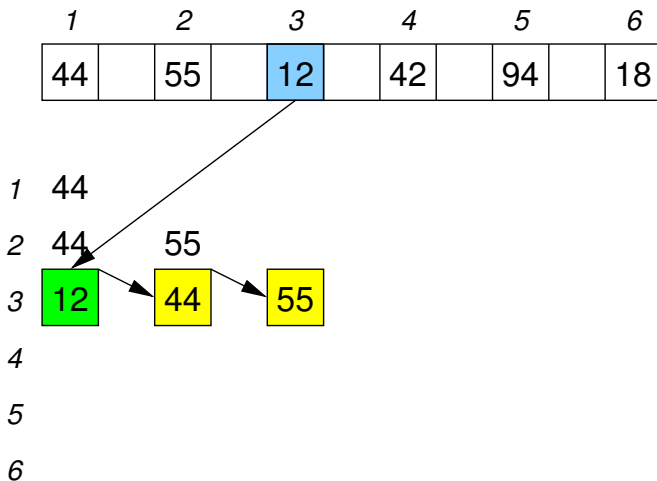
Třídění přímým vkládáním – Insert Sort 1/2

Příklad - Třídění přímým vkládáním



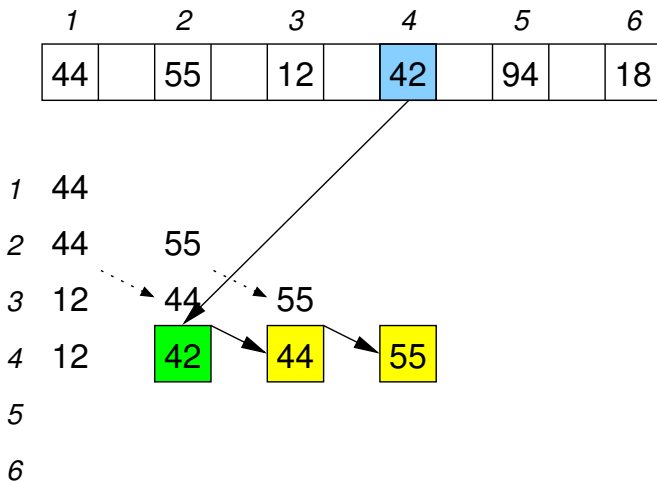
Třídění přímým vkládáním – Insert Sort 1/2

Příklad - Třídění přímým vkládáním



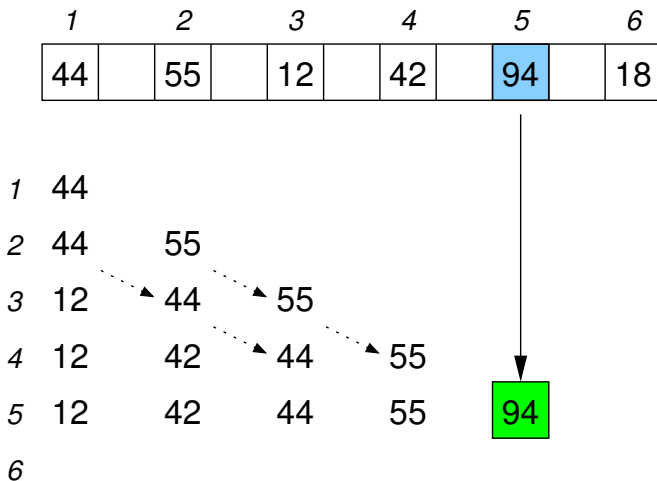
Třídění přímým vkládáním – Insert Sort 1/2

Příklad - Třídění přímým vkládáním



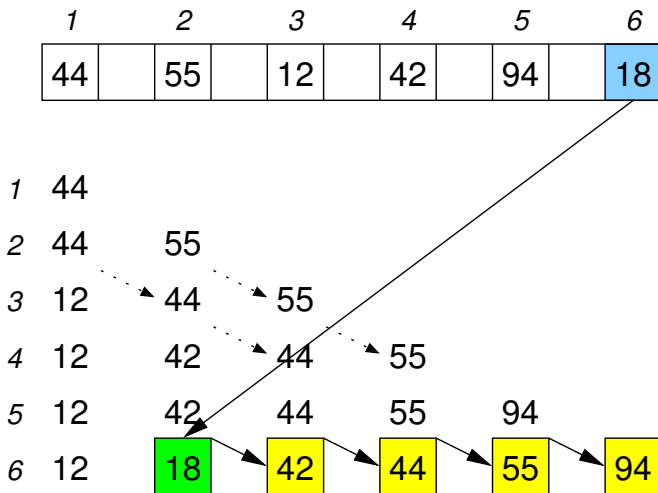
Třídění přímým vkládáním – Insert Sort 1/2

Příklad - Třídění přímým vkládáním



Třídění přímým vkládáním – Insert Sort 1/2

Příklad - Třídění přímým vkládáním



Třídění přímým vkládáním – Insert Sort 2/2

for $i \in \langle 2, n \rangle$

„vlož a_i na patřičné místo mezi a_1, \dots, a_i ”

Příklad - Algoritmus

```
1 void insertSort(int[] array) {
2     int x;
3     int j;
4     for (int i = 1; i < array.length; i++) {
5         x = array[i];
6         j = i - 1;
7         while (j >= 0 && x < array[j]) {
8             array[j + 1] = array[j];
9             j--;
10        }
11        array[j + 1] = x;
12    }
13 }
```

- Třídění binárním vkládáním - vkládání provádíme do již zatříděného pole $\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle$.



Třídění přímým vkládáním – Insert Sort 2/2

for $i \in \langle 2, n \rangle$

„vlož a_i na patřičné místo mezi a_1, \dots, a_i ”

Příklad - Algoritmus

```
1 void insertSort(int[] array) {
2     int x;
3     int j;
4     for (int i = 1; i < array.length; i++) {
5         x = array[i];
6         j = i - 1;
7         while (j >= 0 && x < array[j]) {
8             array[j + 1] = array[j];
9             j--;
10        }
11        array[j + 1] = x;
12    }
13 }
```

- Třídění binárním vkládáním - vkládání provádíme do již zatříděného pole $\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle$.



Řazení přímým výběr – Select Sort 1/3

```
for  $i \in \langle 1, n \rangle$  {  
    „najdi index  $k$  nejmenšího prvku v  $\langle a_i, \dots, a_n \rangle$ ,  
     $a_k = \min\langle a_i, \dots, a_n \rangle$ ,  
    zaměň prvky  $a_i, a_k$ ”  
}
```



Řazení přímým výběr – Select Sort 2/3

Příklad - Řazení přímým výběrem Select Sort

1	2	3	4	5	6
44	55	12	42	94	18

1

2

3

4

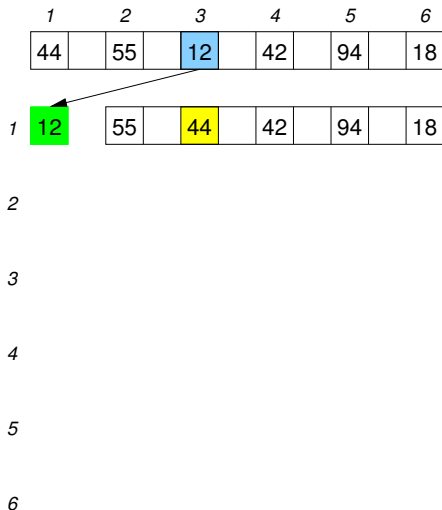
5

6



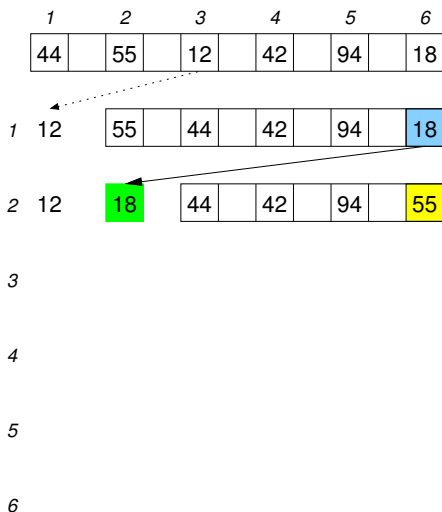
Řazení přímým výběr – Select Sort 2/3

Příklad - Řazení přímým výběrem Select Sort



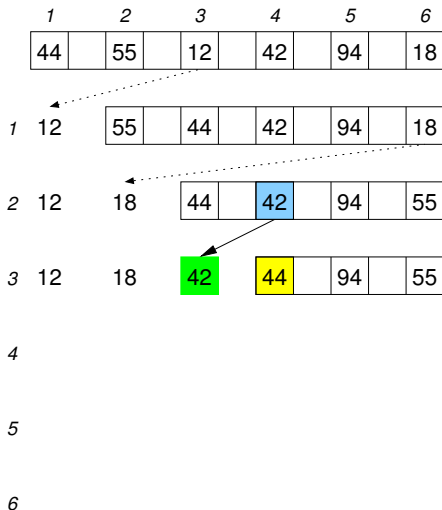
Řazení přímým výběr – Select Sort 2/3

Příklad - Řazení přímým výběrem Select Sort



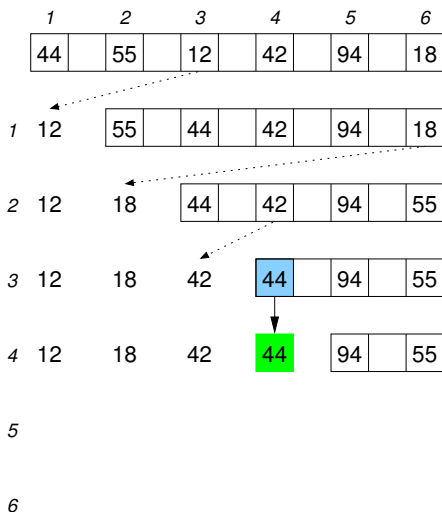
Řazení přímým výběr – Select Sort 2/3

Příklad - Řazení přímým výběrem Select Sort



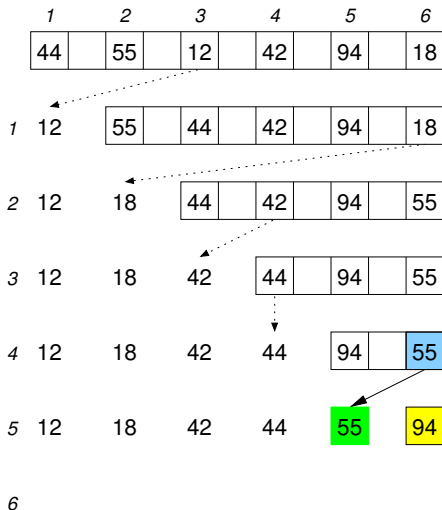
Řazení přímým výběr – Select Sort 2/3

Příklad - Řazení přímým výběrem Select Sort



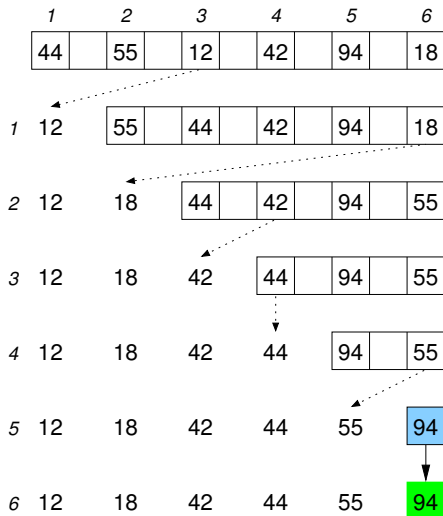
Řazení přímým výběr – Select Sort 2/3

Příklad - Řazení přímým výběrem Select Sort



Řazení přímým výběr – Select Sort 2/3

Příklad - Řazení přímým výběrem Select Sort



Řazení přímým výběr – Select Sort 3/3

Příklad implementace

```
1 void selectSort(int[] array) {
2     for (int i = 0; i < array.length-1; ++i) {
3         int minIDX = i;
4         for (int j = i + 1; j < array.length; ++j) {
5             if (array[minIDX] > array[j]) {
6                 minIDX = j;
7             }
8         }
9         swap(minIDX, i, array);
10    }
11 }
```

Zde pro jednoduchost třídíme jen celá čísla, prakticky však zpravidla třídíme klíče datových položek.

- Složitost $O(n^2)$, kde n je počet položek



Řazení rozdělováním – Quick Sort

„Nejvýznamnější výměny jsou ty na velké vzdálenosti.”

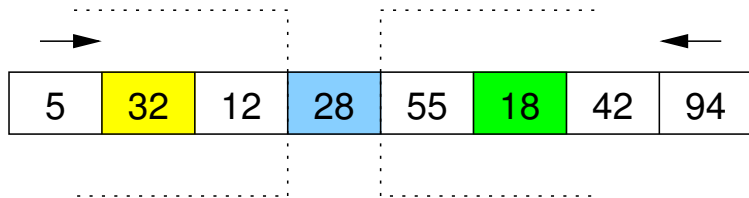
- Pole rozdělíme nějakým prvkem x (pivot).
- Nalevo od prvku x umístíme všechny prvky menší než x .
- Napravo od prvku x umístíme všechny prvky větší než x .
- Rozdělení opakujeme pro pole tvořené prvky nalevo od x a pro pole napravo od x .
- Postup opakujeme dokud nerozdělujeme jednoprvkové úseky.
- Strategie „rozděl a panuj.”

Tuto strategii můžeme implementovat rekurzí



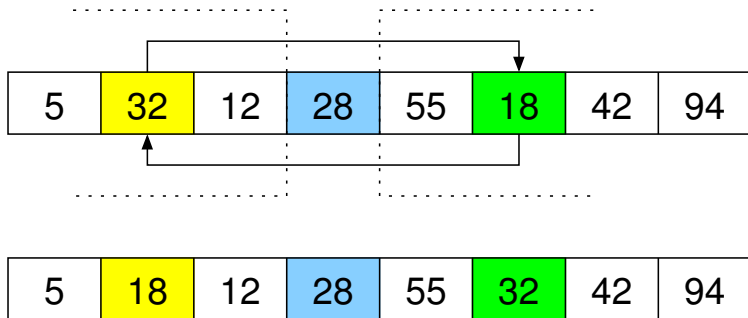
Rozdělení pole

Příklad - rozdělení



Rozdělení pole

Příklad - rozdělení



Řazení rozdělením – Quick Sort 1/2

```
1 void qsortPart(int l, int h, int[] array) {
2     int i = l; //lower index
3     int j = h; //higher index
4     int pivot = array[l + (h - 1) / 2];
5     while (i <= j) {
6         while(array[i] < pivot) {
7             i++;
8         }
9         while(array[j] > pivot) {
10            j--;
11        }
12        if (i <= j) {
13            swap(i++, j--, array);
14        }
15    }
16    if (l < j) {
17        qsortPart(l, j, array);
18    }
19    if (i < h) {
20        qsortPart(i, h, array);
21    }
22 }
```



Řazení rozdělením – Quick Sort 2/2

```
1 void quickSort(int[] array) {  
2     qsortPart(0, array.length-1, array);  
3 }
```

- Složitost pro nejnepříznivější případ je $O(n^2)$
- Vhodně zvolený pivot výrazně snižuje časovou náročnost
- Randomizovaná varianta (vstupní pole permutováno a pivot je volen náhodně) – $O(n \log_2 n)$



Řazení Select Sort vs Quick Sort

■ Příklad spuštění Select Sort vs Quick Sort

```
javac DemoSort.java && java DemoSort 10
Values: 10 24 41 17 20 31 42 5 24 46
Values Select Sort: 5 10 17 20 24 24 31 41 42 46
Values Quick Sort: 5 10 17 20 24 24 31 41 42 46

java DemoSort 40000
Select Sort required time 3415 ms
Quick Sort required time 10 ms
```

[lec06/DemoSort.java](#)

■ Jednoduchý test výpočetní náročnosti můžeme udělat porovnáním výpočetních časů

Např. využitím `System.currentTimeMillis`

■ Skutečné výpočetní nároky se mohou lišit podle vstupních dat

Zkuste zjistit počet operací pro vstupní pole setříděné sestupně

■ Asymptotická složitost udává očekávané výpočetní nároky pro velké vstupy

Reálné testování v tzv. „mikro benchmarks“ může být zvláště v Javě zavádějící (HotSpot)



Zápis algoritmu Quick Sort

Implementace Quick Sort v programovacím jazyku Haskell

```
1 qsort []      = []
2 qsort (x:xs) = qsort (filter (< x) xs) ++ [x] ++ qsort
   (filter (>= x) xs)
```

Pro zajímavost



Shrnutí přednášky



Diskutovaná témata

- Rekurze a rekurzivní algoritmy
- Příklady rekurzivních algoritmů:
 - Výpočet faktoriálu
 - Výpis posloupnosti čísel
 - Hanojské věže
 - Fibonacciho posloupnost
- Reprezentace množiny polem
 - Příklad implementace v algoritmu Eratosthenovo síto
- Příklad rekurze v řazení
- **Příště: Objektivě orientované programování v Javě**

