Základní algoritmy řazení a třídění

A0B36PR1-Programování 1
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické

Algoritmy – přehled

- **Hledání**
  - Sekvenční hledání
  - Hledání se zarážkou
  - Binary Search – hledání binárním půlením
- **Řazení**
  - BubbleSort
  - SelectSort
  - InsertSort
  - QuickSort
  - MergeSort

Složitost algoritmů – doba výpočtu

Doba výpočtu pro různé časové složitosti s předpokladem, že 1 operace trvá 1 µs (10^{-6} sec)

složitost výpočtu	Počet operací, které musí výpočet provést					
	10	**20**	**40**	**60**	**500**	**1000**
$\log_2 n$	3,3 µs	4,3 µs	5 µs	5,8 µs	9 µs	10 µs
n	10 µs	20 µs	40 µs	60 µs	0,5 ms	1 ms
$n \log_2 n$	33 µs	86 µs	0,2 ms	0,35 ms	4,5 ms	10 ms
n^2	0,1 ms	0,4 ms	1,6 ms	3,6 ms	0,25 s	1 s
n^3	1 ms	8 ms	64 ms	0,2 s	125 s	17 min
n^4	10 ms	160 ms	2,56 s	13 s	17 hod	11,6 dnů
2^n	1 ms	1 s	12,7 dnů	36000 let	10^{137} let	10^{287} let
$n!$	3,6 s	77000 let	10^{34} let	10^{68} let	10^{1110} let	10^{2554} let

Průběhy doby výpočtu

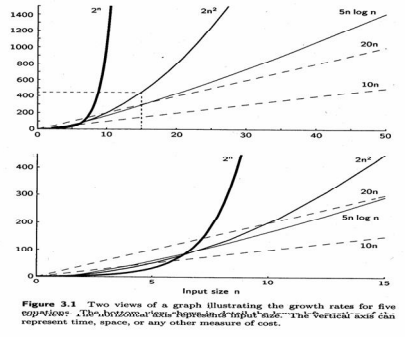


Figure 3.1 Two views of a graph illustrating the growth rates for five common functions. The horizontal axis represents input size. The vertical axis can represent time, space, or any other measure of cost.

Časová složitost algoritmů I

- Důležitou vlastností algoritmu je, jakou časovou náročnost mají výpočty provedené podle daného algoritmu
- Časová náročnost výpočtů se nezískává měřením doby výpočtu pro různá data, ale analýzou algoritmu, jejímž výsledkem je časová složitost algoritmu
- Časová složitost algoritmu vyjadřuje závislost času potřebného pro provedení výpočtu na rozsahu (velikosti) vstupních dat
- Čas se přitom „měří" počtem provedených operací, přičemž doba provedení každé operace nezávisí na rozsahu vstupních dat
- Příklad: součet prvků pole

```
static int soucet(int[] pole) {
  int s = 0;
  for (int i=0; i<pole.length; i++) s = s + pole[i];
  return s;
}
```

- Budeme-li za operace považovat podtržené konstrukce, pak časová složitost je

  $C(n) = 2 + (n+1) + n + n = 3 + 3n$

  kde n je počet prvků pole

Hledání - v poli, sekvenčně

Postupné prohledávání

```
static int hledej(int[] pole, int x) {
   for (int i=0; i<pole.length; i++)
     if (x==pole[i]) return i;
   return -1;
 }
```

Časová složitost je O(n), tj. čas pro zpracování n položek je přímo úměrný počtu položek n

Hledání, v poli se zarážkou

- Sekvenční hledání v poli lze urychlit pomocí zarážky
- Za předpokladu, že pole není zaplněno až do posledního prvku, uložíme do prvního volného prvku hledanou hodnotu a cyklus pak může být řízen jedinou podmínkou
- Sekvenční hledání se zarážkou:

```
static int hledejSeZarazkou(int[] pole, int volny, int x) {
  int i = 0;
  pole[volny] = x; // uložení zarážky, hledaná hodnota
  while (pole[i]!=x){ // místo (pole[i]!=x && i<volny)
    i++;
  }
  if (i<volny) // hodnota nalezena
    return i;
  else         // hodnota nenalezena, došly jsme až k
  zarážce
    return -1;
}
```

- Časová složitost je O(*n*), nejde tedy o významné urychlení

Binární půlení

- **Algoritmus hledání binárním půlením:**

```
static int hledejBinarne(int[] pole, int x) {
  int dolni = 0;
  int horni = pole.length-1;
  int stred;
  while (dolni<=horni) {
    stred = (dolni+horni)/2;
    if (x<pole[stred]) horni = stred-1;
    else if (x>pole[stred]) dolni = stred +1;
    else return stred;
  }
  return -1;
}
```

časová složitost je **O(*log n*)**

Časová složitost algoritmů II

- Přesné určení počtu operací při analýze složitosti algoritmu je často velmi složité
- Zvlášť komplikované (nebo i nemožné) bývá určení počtu operací v průměrném případě; proto se většinou omezujeme jen na analýzu nejhoršího případu
- Zpravidla nás ani nezajímají konkrétní počty operací pro různé rozsahy vstupních dat *n*, ale tendence jejich růstu při zvětšujícím se *n*
- Pro tento účel lze výrazy udávající složitost zjednodušit: stačí uvažovat pouze složky s nejvyšším řádem růstu a i u nich lze zanedbat multiplikativní konstanty
- Příklad: řád růstu časové složitosti předchozích algoritmů je *n* (časová složitost je lineární)
- **Časovou složitost vyjadřujeme pomocí asymptotické notace:**

O dvou funkcích *f* a *g* definovaných na množině přirozených čísel a s nezáporným oborem hodnot říkáme, že *f* **roste řádově nejvýš tak rychle**, jako *g* a píšeme

$f(n) = O(g(n))$

pokud existují přirozená čísla K a n_1 tak, že platí

$f(n) \leq K.g(n)$ pro všechna $n > n_1$

Řazení zaměňováním (BubbleSort - probublávání)

Při řazení zaměňováním postupně porovnáváme sousední prvky a pokud jejich hodnoty nejsou v požadované relaci, vyměníme je; to je třeba provést několikrát

Hrubé řešení:

```
for (n=a.length-1; n>0; n--)
  for (i=0; i<n; i++)
    if (a[i]>a[i+1])
       "vyměň a[i] a a[i+1]";
```

Podrobné řešení

```
static void bubbleSort(int[] a) {
int pom, n, i;
for (n=a.length-1; n>0; n--)
  for (i=0; i<n; i++)
    if (a[i]>a[i+1]) {
    pom = a[i]; a[i] = a[i+1];
    a[i+1] = pom;
          }
    }
```

Časová složitost je **O(n^2),** tj. čas pro zpracování n položek je úměrný kvadrátu počtu položek n

Řazení výběrem (SelectSort)

- Při řazení výběrem se opakovaně hledá nejmenší prvek
- Hrubé řešení:

```
for (i=0; i<a.length-1; i++) {
"najdi nejmenší prvek mezi a[i] až a[a.length-1]"
  "vyměň hodnotu nalezeného prvku s a[i]";
  }
```

Podrobné řešení

```
public static void selectSort(int[] a) {
    int i, j, imin, pom;
    for (i=0; i<a.length-1; i++) {
      imin = i;
      for (j=i+1; j<a.length; j++)
        if (a[j]<a[imin]) imin = j;
      if (imin!=i) {
        pom = a[imin];
        a[imin] = a[i];
        a[i] = pom;
  }}}
```

Časová složitost algoritmu SelectSort: O(n^2)

Řazení vkládáním (InsertSort)

Pole lze seřadit opakováním algoritmu vložení prvku do seřazeného úseku pole

Hrubé řešení:

```
for (n=1; n<a.length; n++) {
  "úsek pole od a[0] do a[n-1] je seřazen"
  "vlož do tohoto úseku délky n hodnotu a[n]"
}
```

Podrobné řešení:

```
private static void vloz(int[] a, int n, int x) {
  int i;
  for (i=n-1; i>=0 && a[i]>x; i--)
    a[i+1] = a[i];
  a[i+1] = x;
}
```

```
public static void insertSort(int[] a) {
   for (int n=1; n<a.length ; n++)
     vloz(a, n, a[n]);
 }
```

Časová složitost algoritmu InsertSort: O(n^2)

Slučování (Merging)

- Problém slučování lze obecně formulovat takto:
  - ze dvou seřazených (monotónních) (!) posloupností *a* a *b* máme vytvořit novou posloupnost obsahující všechny prvky z *a* a *b*, která je rovněž seřazená
- Příklad:

a:	2 3 6 8 10 34
b:	3 7 12 13 55
výsledek:	2 3 3 6 7 8 10 12 13 34 55

Poznámka:

Neefektivní řešení: Vytvoříme pole, do něhož zkopírujeme prvky a, přidáme prvky b a pak seřadíme - to není slučování!

Slučování

- Princip slučování:
  1. postupně porovnáváme prvky zdrojových posloupností a do výsledné posloupnosti přesouváme menší z nich
  2. nakonec zkopírujeme do výsledné posloupnosti zbytek první nebo druhé posloupnosti

```
static int[] slucPole(int[] a, int[] b) {
  int[] c = new int[a.length+b.length];
  int ia = 0, ib = 0, ic = 0;
  while (ia<a.length && ib<b.length)
    if (a[ia]<b[ib])c[ic++] = a[ia++];
    else c[ic++] = b[ib++];
  while (ia<a.length) c[ic++] = a[ia++];
  while (ib<b.length) c[ic++] = b[ib++];
  return c;
}
```

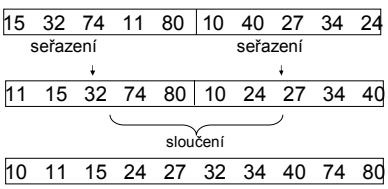

Řazení slučováním (MergeSort)

Efektivnější algoritmy řazení mají časovou složitost O(*n log n*)

Jedním z nich je algoritmus řazení slučováním, který je založen na opakovaném slučování seřazených úseků do úseků větší délky

Lze jej popsat rekurzívně:

- řazený úsek pole rozděl na dvě části
- seřaď levý úsek a pravý úsek
- přepiš řazený úsek pole sloučením levého a pravého úseku



Sloučení dvou seřazených úseků pole

- Funkce, která sloučí dva sousední již seřazené úseky pole *a* a výsledek uloží do pole *b*:

```
private static void merge(int[] a, int[] b,
                          int levy, int pravy,
                          int poslPravy) {
  int poslLevy = pravy-1;
  int i = levy;
  while (levy<=poslLevy && pravy<=poslPravy)
    if (a[levy]<a[pravy])
      b[i++] = a[levy++];
    else
      b[i++] = a[pravy++];
  while (levy<=poslLevy) b[i++] = a[levy++];
  while (pravy<=poslPravy) b[i++] = a[pravy++];
}
```


Nerekurzívní MergeSort

- Nerekurzívní (iterační) algoritmus MergeSort postupuje zdola nahoru:
  - pole *a* se rozdělí na dvojice úseků délky 1, které se sloučí do seřazených úseků délky 2 v pomocném poli *pom*
  - dvojice sousedních seřazených úseků délky 2 v poli *pom* se sloučí do seřazených úseků délky 4 v poli *a*
  - dvojice sousedních úseků délky 4 v poli *a* se sloučí do seřazených úseků délky 8 v poli *pom*
  - atd.
  - tento postup se opakuje, pokud délka úseku je menší než velikost pole
  - skončí-li slučování tak, že výsledek je v pomocném poli *pom*, je třeba jej zkopírovat do původního pole *a*

Příklad řazení slučováním zdola

a 49 62 21 70 89 99 21 76 53 40 87 70 32 70 24 93 90 65 90

pom 49 62 21 70 89 99 21 76 40 53 70 87 32 70 24 93 65 90 90

a 21 49 62 70 21 76 89 99 40 53 70 87 24 32 70 93 65 90 90

pom 21 21 49 62 70 76 89 99 24 32 40 53 70 70 87 93 65 90 90

a 21 21 24 32 40 49 53 62 70 70 70 76 87 89 93 99 65 90 90

pom 21 21 24 32 40 49 53 62 65 70 70 70 76 87 89 90 90 93 99

Nerekurzívní MergeSort

```
public static void mergeSort(int[] a) {
int[] pom = new int[a.length];
int[] odkud = a;   int[] kam = pom;
int delkaUseku = 1;   int posl = a.length-1;
while (delkaUseku<a.length) {
 int levy = 0;
 while (levy<=posl) {
  int pravy = levy+delkaUseku;
  merge(odkud, kam, levy,Math.min(pravy, a.length),
              Math.min(pravy+delkaUseku-1, posl));
  levy = levy+2*delkaUseku;
       }
 delkaUseku = 2*delkaUseku;
 int[] p = odkud; odkud = kam; kam = p;
 }
if (odkud!=a)
 for (int i=0; i<a.length; i++) a[i] = pom[i];
 }
```


Rekurzívní MergeSort

- Rekurzívní (iterační) algoritmus MergeSort postupuje shora dolu:
  - Rekurzívní MergeSort se volá rekurzívně tak dlouho, dokud délka úseku pole není 1
  - Pak začne slučování sousedních úseků do dvakrát většího úseku v pomocném poli, který je třeba zkopírovat do původního pole
  - Rozdělení pole na úseky, které se postupně slučují, je dáno postupným půlením úseků pole shora dolů.

Rekurzivní řazení slučováním MergeSort

- Rekurzivní funkce řazení úseku pole:

```
private static void mergeSort(int[] a, int[] pom, int prvni,
  int posl) {
     if (prvni<posl) {
       int stred = (prvni+posl)/2;
       mergeSort(a, pom, prvni, stred);
       mergeSort(a, pom, stred+1, posl);
       merge(a, pom, prvni, stred+1, posl);
       for (int i=prvni; i<=posl; i++) a[i] = pom[i];
     }
   }
public static void mergeSort(int[] a) {
     int[] pom = new int[a.length];
     mergeSort(a, pom, 0, a.length-1);
   }
```

Problém pro zájemce

- Je dána posloupnost celých čísel A_1, A_2, ... A_n. Máme najít takovou její podposloupnost A_i až A_j , jejíž prvky dávají největší kladný součet ze všech ostatních podposloupností
- Příklad:
  - pro {-2, **11**, **-4**, **13**, -5, 2} je výsledkem *i*=2, *j*=4, *soucet*=20
  - pro {1, -3, **4**, **-2**, **-1**, **6**} je výsledkem *i*=3, *j*=6, *soucet*=7
  - pro {-1, -3, -5, -7, -2} je výsledkem *i*=0, *j*=0, *soucet*=0
- Pro řešení tohoto problému lze sestavit několik, méně či více efektivních algoritmů
- Poznámka: čísla A_1, A_2, ... A_n budou uložena v prvcích pole *a*[0], *a*[1], ... *a*[*n*-1], kde *n* je velikost pole *a*

Řešení hrubou silou

- Nejjednodušší (a nejméně efektivní) je algoritmus, který postupně probere všechny možné podposloupnosti, zjistí součet jejich prvků a vybere tu, která má největší součet

```
static int maxSoucet(int[] a) {
   int maxSum = 0;
   for (int i=0; i<a.length; i++)
     for (int j=i; j<a.length; j++) {
       int sum = 0;
       for (int k=i; k<=j; k++)
         sum += a[k];
       if (sum>maxSum) {
         maxSum = sum;
         prvni = i;
         posledni = j;
       }
     }
   return maxSum;
 }
```

- Poznámka: proměnné *prvni* a *posledni* jsou nelokálními proměnnými
- Časová složitost tohoto algoritmu je **O(n^3) (kubická)**

Řešení s kvadratickou složitostí

- Vnitřní cyklus (proměnná *k*) počítající součet $S_{i,j}$ = *a*[*i*]+...+*a*[*j*] je zbytečný: známe-li součet $S_{i,j-1}$ = *a*[*i*]+...+*a*[*j*-1], pak $S_{i,j} = S_{i,j-1}$ + *a*[*j*]

```
static int maxSoucet(int[] a) {
  int maxSum = 0;
  for (int i=0; i<a.length; i++) {
    int sum = 0;
    for (int j=i; j<a.length; j++) {
      sum += a[j];
      if (sum>maxSum) {
        maxSum = sum;
        prvni = i;
        posledni = j;
      }
    }
  }
  return maxSum;
}
```

- **Časová složitost tohoto algoritmu je O(n^2)**

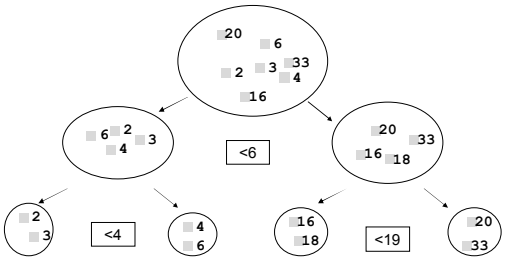
Řešení s lineární složitostí

- Řešení lze sestavit s použitím jediného cyklu s řídicí proměnnou *j*, která udává index posledního prvku podposloupnosti
- Proměnná *i* udávající index prvního prvku podposloupnosti se bude měnit takto:
  - počáteční hodnotou *i* je 0
  - postupně zvětšujeme *j* a je-li součet podposloupnosti od *i* do *j* (sum) větší, než doposud největší součet (*sumMax*), zaznamenáme to (*prvni=i, posledni=j, sumMax=sum*)
  - vznikne-li však zvětšením *j* podposloupnost, jejíž součet je záporný, pak žádná další podposloupnost začínající indexem *i* a končící indexem *j*1, kde *j*1>*j*, nemůže mít součet větší, než je zaznamenán; hodnotu proměnné *i* je proto možné nastavit na *j*+1 a *sum* na 0

Řešení s lineární složitostí

```
static int maxSoucet(int[] a) {
    int maxSum = 0;
    int sum = 0, i = 0;
    for (int j=0; j<a.length; j++) {
      sum += a[j];
      if(sum > maxSum) {
        maxSum = sum;
        prvni = i;
        posledni = j;
      }
      else if(sum < 0) {
        i = j + 1;
        sum = 0;
      }
    }
    return maxSum;
  }
```


QuickSort



QuickSort I

```
class Quick {
  static void quickSort (int[] a, int
  left, int right){
    if(left <  right){
      int p = castecne(a, left, right);
      quickSort(a, left, p-1);
      quickSort(a, p+1, right);
    }
  }
    private static int castecne(int[] a, int left, int right){
        int pivot = a[left]; int p = left;
        for (int r = left + 1; r <= right; r++) {
          if(a[r] < pivot){
            a[p] = a[r]; a[r] = a[p+1]; a[p+1]= pivot;
            p++;
          }
        }
        return p;
      }
```

33|60|40|20|10

20|10|33|60|40

Pro zájemce

QuickSort II

```
public static void main(String[] args) {
    int[] pole={22, 33, 14, 91, 3 , 51 , 6, 24, 7, 44,
  5};
    for (int i = 0; i < pole.length; i++) {
      System.out.print(pole[i] + " ");
    }
    System.out.print ();
      quickSort(pole, 0, 10);
      for (int i = 0; i < pole.length; i++) {
      System.out.print (pole[i] + " ");
    }
}
```

22 33 14 91 3 51 6 24 7 44 5
3 5 6 7 14 22 24 33 44 51 91

- Časová složitost algoritmu QuickSort:
  - **průměrně(*n* log n), až O(n²)**
- Prostorová složitost algoritmu QuickSort: **O(n)**
- Viz http://en.wikipedia.org/wiki/Quicksort

Pro zájemce

Přihrádkové řazení

1. průchod 223 131 458 193 756 812 027 579 283 200
   rozdělení podle poslední číslice

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	131	812	283 193 223			756	027	458	579

2. průchod 200 131 812 223 193 283 756 027 458 579
   rozdělení podle druhé číslice

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	812	027 223	131		458 756		579	283	193

3. průchod 200 812 223 027 131 756 458 579 283 193
   rozdělení podle první číslice

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
027	193 131	283 223 200		458	579		756	812	

 Výstup: 027 131 193 200 223 283 458 579 756 812

Přihrádkové řazení

```
static int hexCislice(int x, int r) {
    return (x >> 4*r) & 0xF;
}
static void caseSort(int[] pole) {
FrontaCisel[] prihradky = new FrontaCisel[16];
int r, j, c;
for ( c=0; c<prihradky.length; c++ )prihradky[c] = new
  FrontaCisel();
for ( r=0; r<8; r++ ) {
  for ( j=0; j<pole.length; j++ )
   prihradky[hexCislice(pole[j],r)].vloz(pole[j]);
   j = 0;
     for ( c=0; c<prihradky.length; c++ )
        while ( !prihradky[c].jePrazdna() )
          pole[j++] = prihradky[c].odeber();
} }
```

Pro zájemce