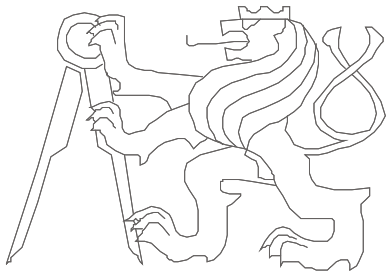
Architektury počítačů

Počítačová aritmetika

Miroslav Šnorek, Michal Štepanovský, Pavel Píša



České vysoké učení technické, Fakulta elektrotechnická

Důležitá poznámka úvodem

- Nechceme vás učit počítač navrhnout, ale
- Porozumět jeho struktuře, abyste mohli lépe využít jeho možností k dosažení jeho vyššího výkonu.

- Tento předmět je zejména o HW/SW interfejsu.

- Vychází ze světově uznávané knihy autorů
- Paterson, D., Henessy, V.: Computer Organization and Design, The HW/SW Interface. Elsevier, ISBN: 978-0-12-370606-5

- Stránky předmětu: https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/a0b36apo/start

Hodnocení a podmínky absolvování

Zápočet:

Kategorie	Body	Nutné minimum
4 domácí úkoly	24	10
Vstupní test (1. přednáška)	4	0
Hlavní test (9. přednáška)	20	10
Týmový projekt	20	5
Celkem	**68**	

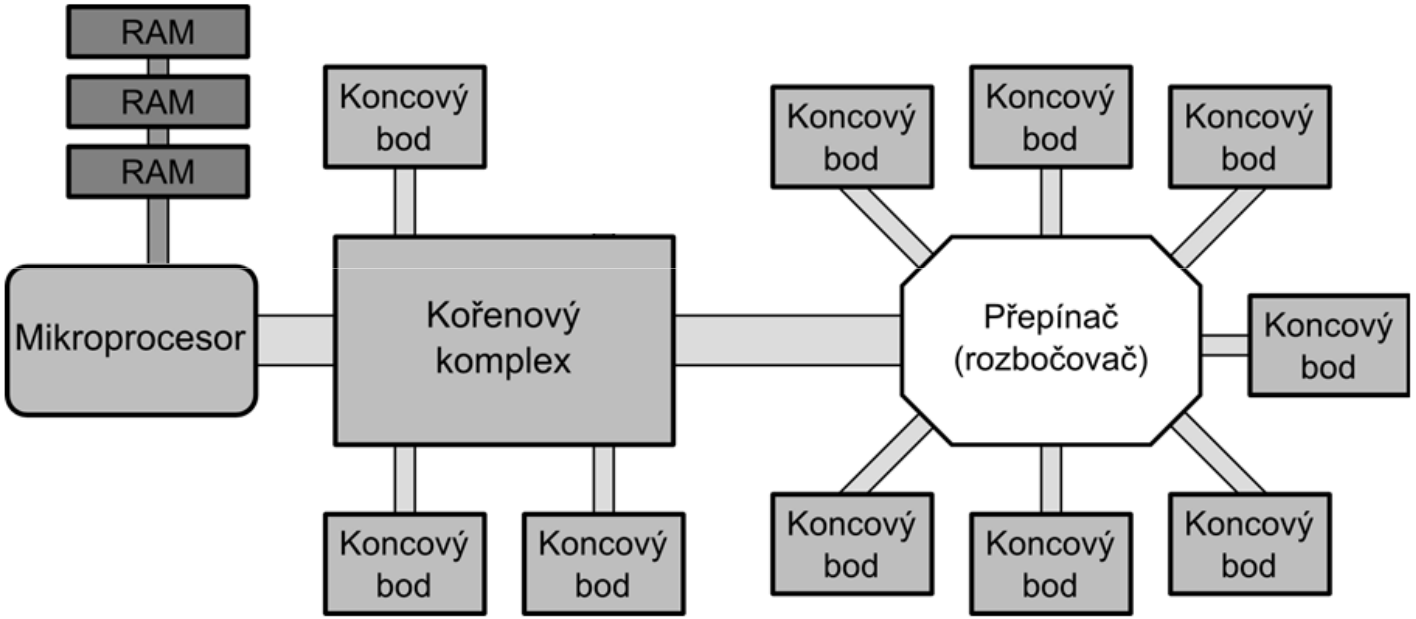
Zkouška:

Kategorie	Body	Nutné minimum
Písemná část zkoušky	30	15
Ústní část zkoušky	+/- 10	0

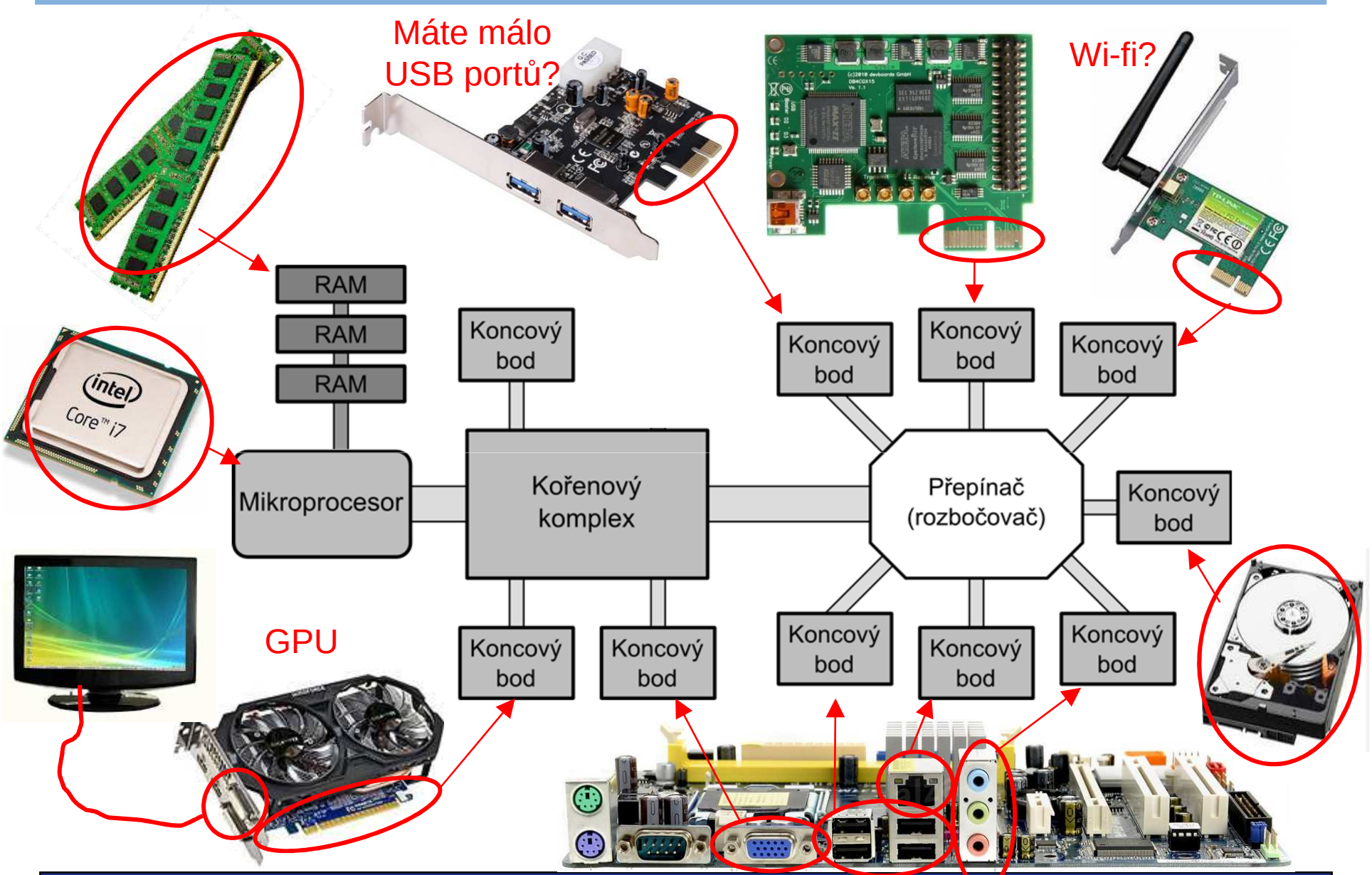
Známka	Bodové rozmezí
A	90 a více
B	80 - 89
C	70 - 79
D	60 - 69
E	50 - 59
F	méně než 50

Architektura dnešního PC ???

Architektura dnešního PC



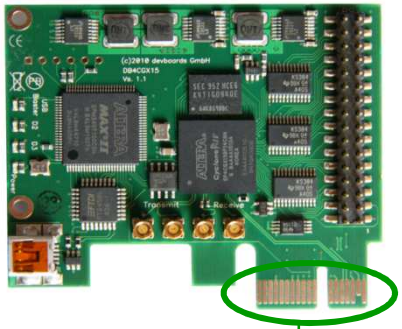
Architektura dnešního PC



Přehled témat přednášek

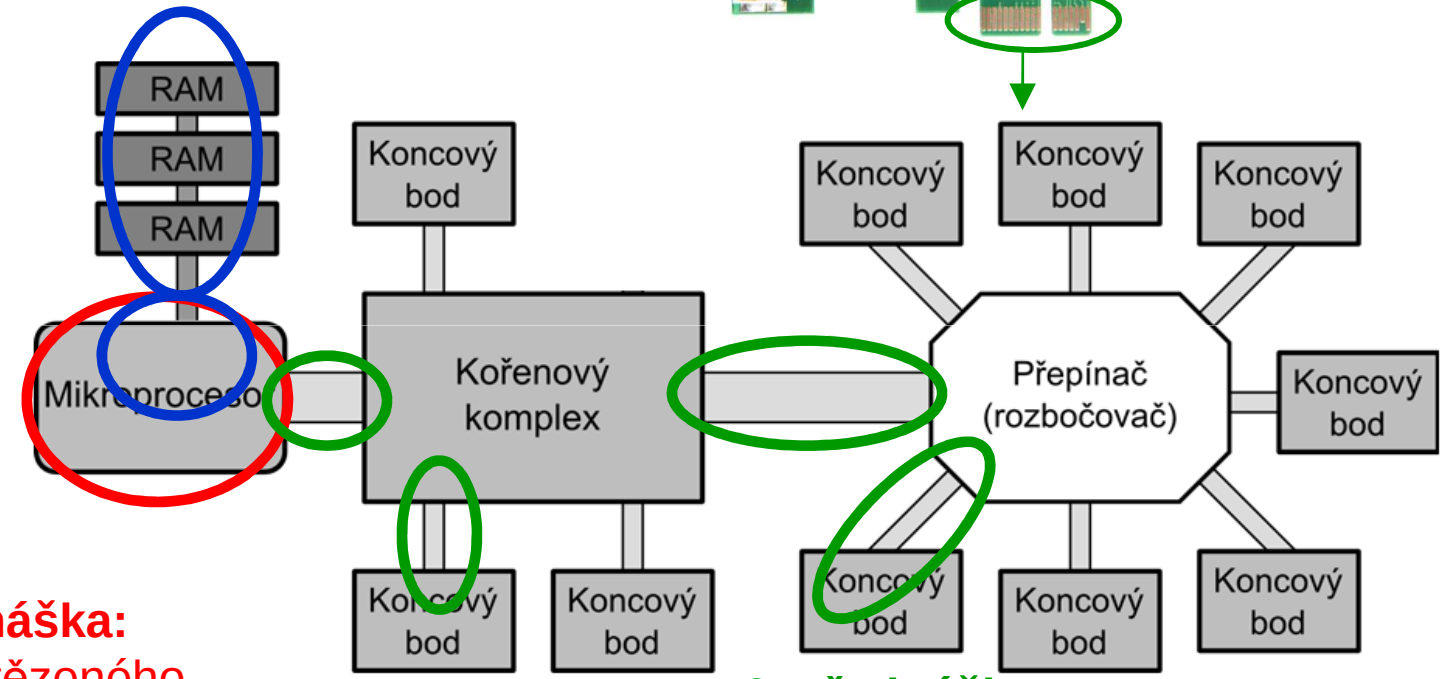
3. přednáška:
Paměťový subsystém – hierarchie pamětí. Statická a dynamická paměť

4. přednáška:
Paměťový subsystém – virtuální paměť



7. přednáška:
Vstupně/výstupní podsystém. SW pohled.

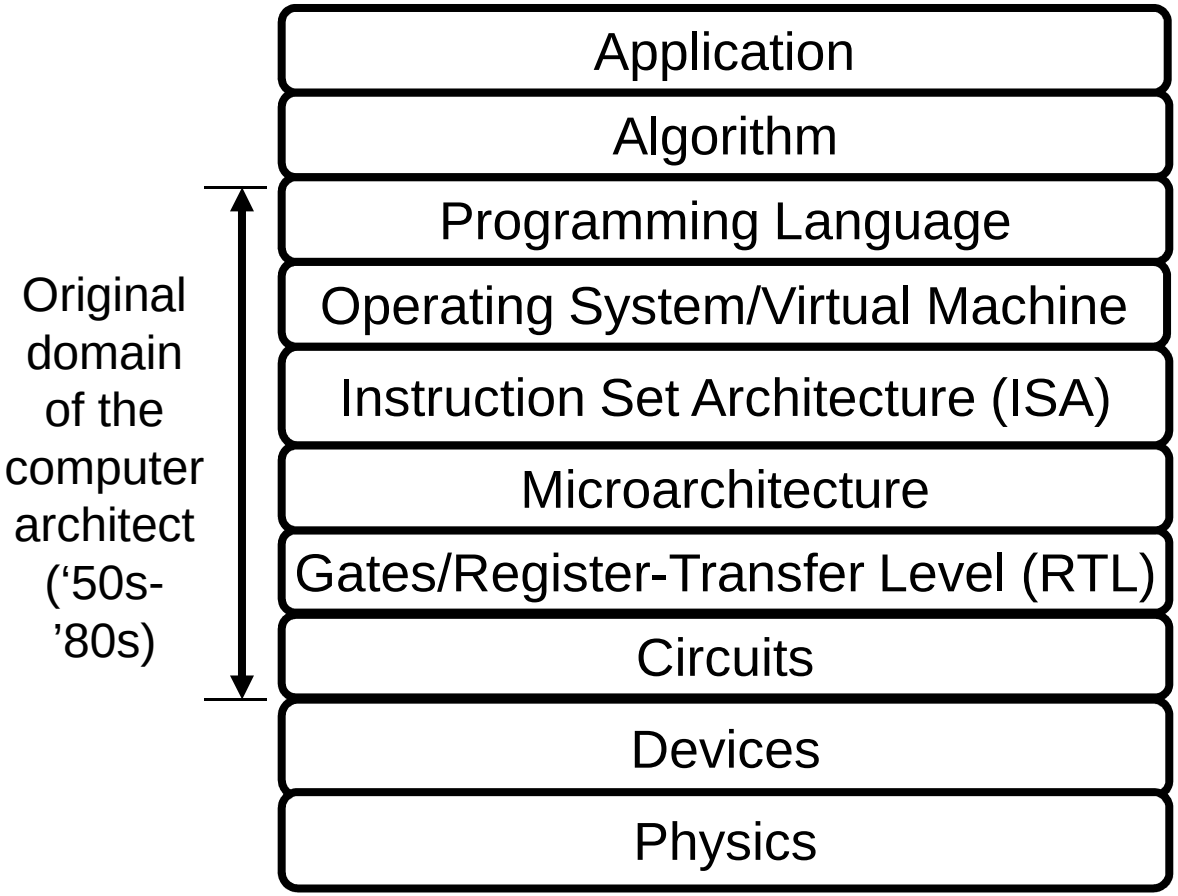
2. přednáška:
Návrh jednoduchého CPU, Vykonávání instrukcí, Funkce řadiče



5. přednáška:
Princip zřetězeného zpracování instrukcí, Řešení hazardů uvnitř CPU

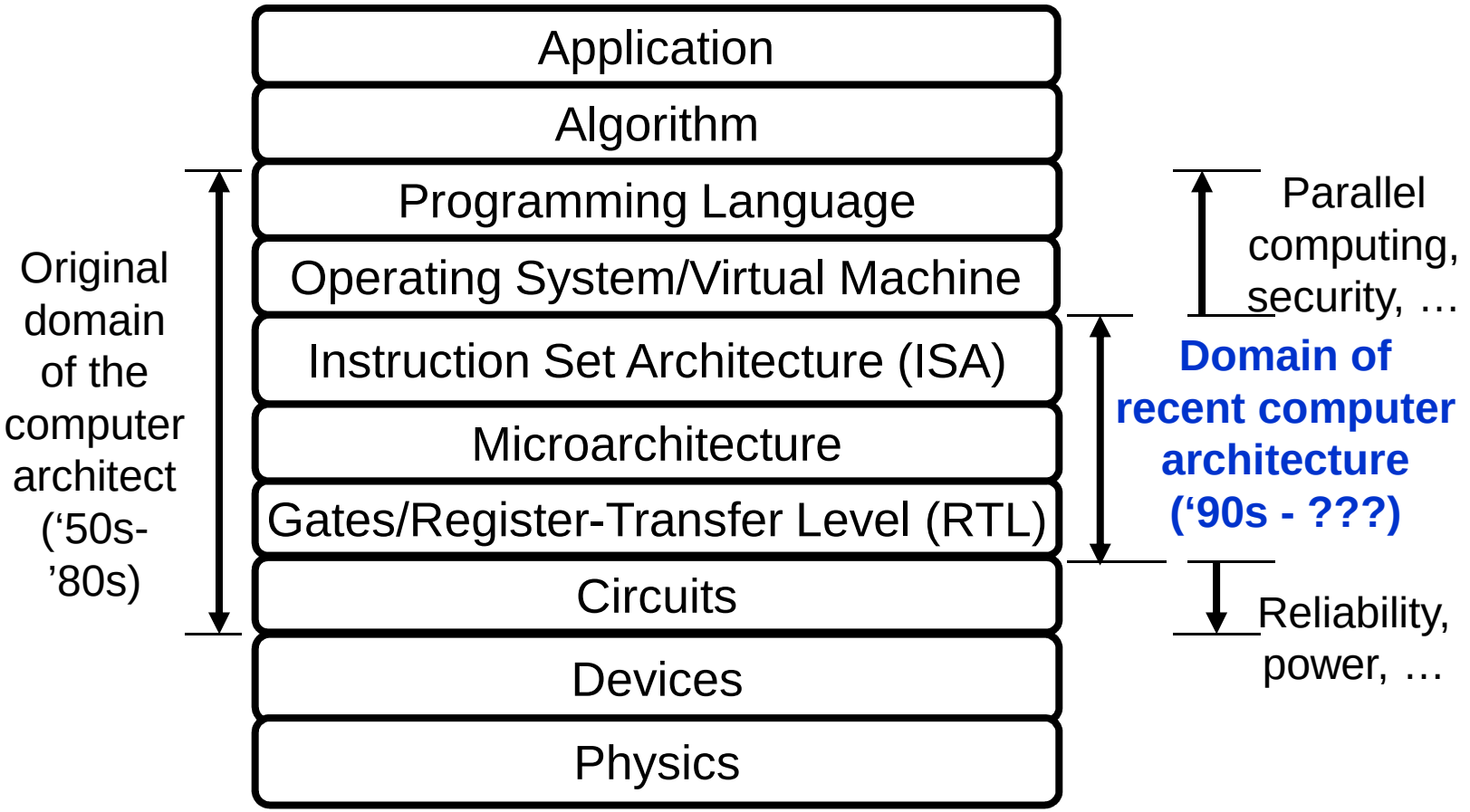
6. přednáška:
Vstupně/výstupní podsystém. HW pohled. Sběrnice PCI, propojení PCIe, USB, SerialATA, HyperTransport, QuickPath interconnect

Co je to architektura počítače?



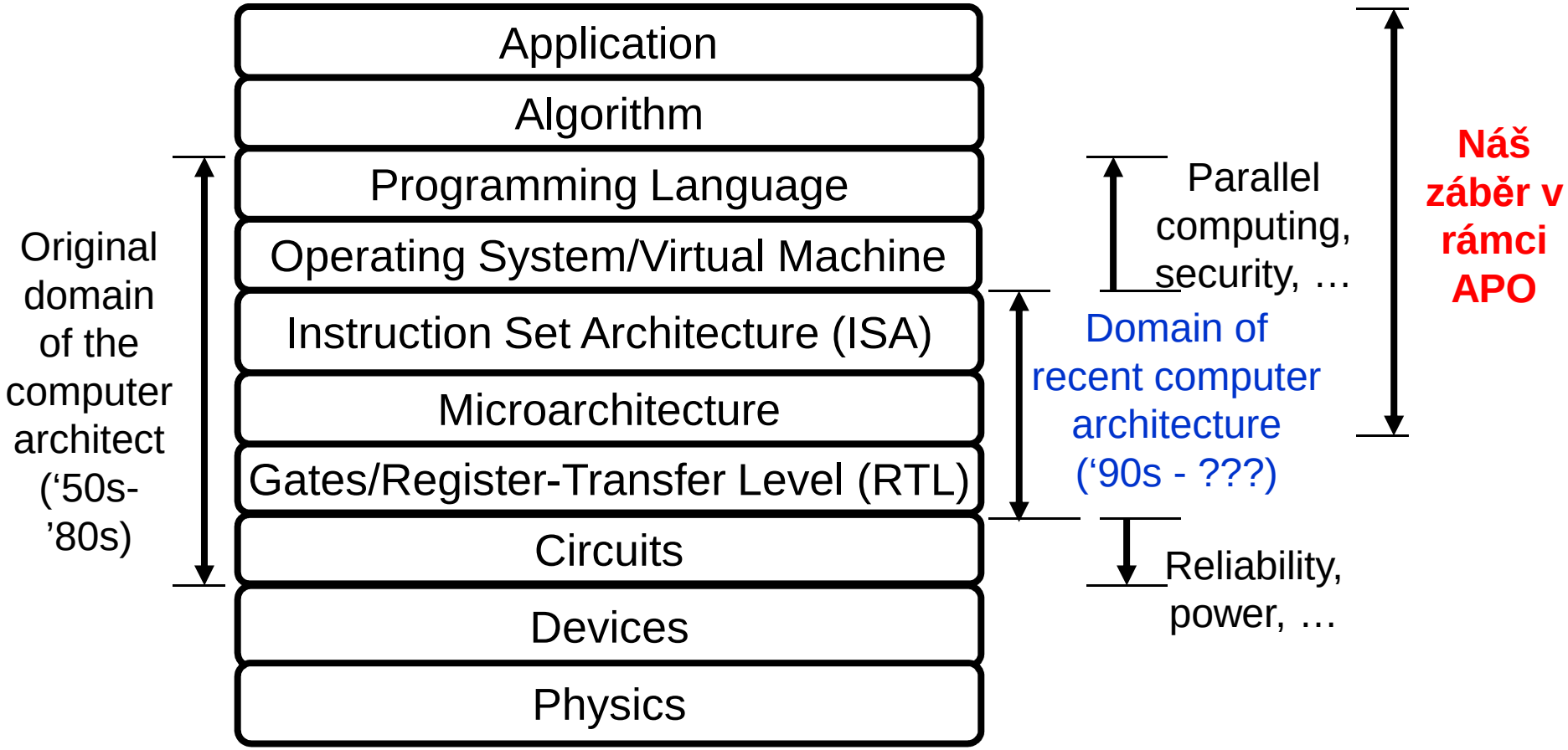
Reference: John Kubiatowicz: EECS 252 Graduate Computer Architecture, Lecture 1. University of California, Berkeley

Co je to architektura počítače?



Reference: John Kubiatowicz: EECS 252 Graduate Computer Architecture, Lecture 1. University of California, Berkeley

Co je to architektura počítače?



Reference: John Kubiatowicz: EECS 252 Graduate Computer Architecture, Lecture 1. University of California, Berkeley

Přehled témat přednášek

8. Technické a organizační prostředky (vnější události, výjimky, reálný čas)
9. Sítě procesorů a počítačů
10. Předávání parametrů funkcím a virtuálním instrukcím operačního systému
11. Klasická registrově orientovaná architektura CISC (M68000)
12. Procesorová rodina INTEL x86, Od 8086 k EMT64
13. Přehled vývoje architektury a koncepcí CPU (RISC/CISC)
14. Víceúrovňový model počítače, virtualizace

Proč je potřeba studovat i nízkoúrovňovou konstrukci počítače

- Pro návrh nové počítačové/procesorové architektury
- Pro implementaci vybrané architektury v integrovaném obvodu/FPGA
- Pro obvodový návrh hardware/systému (velké nebo vestavné systémy)
- Pro porozumění obecným otázkám a problémům ohledně počítačů, jejich architektur a výkonnosti
- **Pro to jak efektivně využívat existující hardware** (to znamená, jak psát kvalitní software)
  - Bez přehledu a pochopení chování, možností, omezení a limitace zdrojů není možné efektivně využít žádný hardware (pro moderní HW s více jádry a výpočetními subsystému to platí dvojnásob)
  - Určitě lze vytvořit dobře placené programy i bez těchto znalostí, ale budou vyžadovat mnohonásobně silnější hardware a budou plýtvat zdroji. Není však takto možné vytvořit žádné náročné aplikace ať již na výkon nebo na ušetřen energie. Přitom to je oblast kde probíhá skutečný vývoj a mají z dlouhodobějšího technologického a i vědeckého pohledu smysl.

Další motivace a příklady

- Předkládané znalosti jsou nutné pro každého programátora, jehož aplikace pracují i jen s větším ovšem dnes běžným množstvím dat nebo vyžadují netriviální výpočetní výkon
- Žádná práce s multimédii nemůže být vykonána dobře bez takovýchto znalostí
- 1/3 našeho kurzu je zaměřená i na přístup k periferiím
- Příklady
  - Facebook – HipHop for PHP -> C++/GCC -> machine code
  - BackBerry (RIM) – our consultations for time source
  - RedHat – JAVA JIT for ARM for future servers generation
  - Multimedia and CUDA computations
  - Photoshop, GIMP (organizace dat v paměti)
  - Knot-DNS (RCU, Copy on write, Cuckoo hashing,)

Obsah 1. přednášky

- Jak se v počítači ukládají
  - Čísla typu INTEGER, bez i se znaménkem,
  - Čísla typu REAL,
  - Hodnoty typu LOGICAL?
- Jak se realizují základní operace
  - Sčítání, odčítání,
  - Posuny,
  - Násobení, dělení,

MOTIVACE: Co program vytiskne?

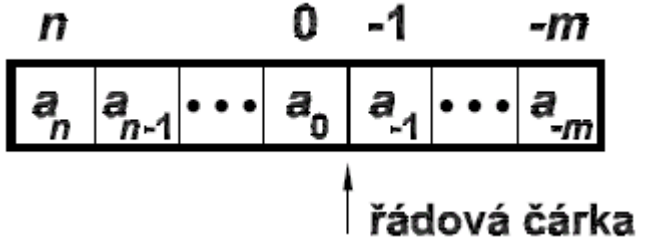
```
int main() {
  int a = -200;
  printf("hodnota: %u = %d = %f = %c \n", a,
  a, *((float*)(&a)), a);

  return 0;
}
```

```
hodnota: 4294967096 = -200 = nan = 8
```

```
0x38 0xff 0xff 0xff
```

Základní terminologie

- **Poziční číselná soustava**,
- Řádová čárka, nebo lépe tečka,
- z základ číselné soustavy,
- Nejmenší zobrazitelné číslo,
- **Modul** = $\mathcal{Z}$, číslo o jedničku větší, než je největší zobrazitelné číslo v dané řádové mřížce,
- Zobrazitelná čísla, k je celé číslo.



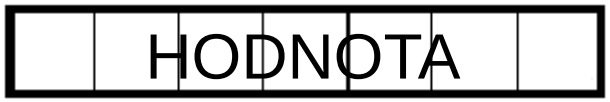
$$\epsilon = z^{-m}$$

$$\boxed{0 \leq A = k \cdot \epsilon < \mathcal{Z}}$$

$$A \sim a_n a_{n-1} \ldots a_0, a_1 \ldots a_{-m}$$

$$A = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 + a_1 z^{-1} \ldots a_{-m} z^{-m}$$

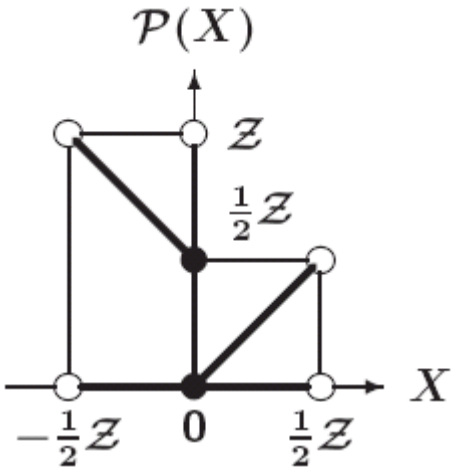
Uložení čísel typu INTEGER



- Kolik je různých stavů položky HODNOTA ?
  - 2↑8 = 256D (desítkově). To není mnoho, že?
  - Řešení: proč nepoužít více bajtů?
  - 4B = 2↑32 = 4 294 976 296D,
  - 8B = 2↑64 = (spočítejte si sami).
- Čísla je ale třeba většinou ukládat se znaménkem.
- Při vhodném kódování můžeme ušetřit HW.
- Například odčítání lze provést obvody na sčítání (sčítačkou).

Čísla INTEGER se znaménkem

- Znaménko a hodnota. Jde o tzv. **přímý kód**.
  - +1234, -5678.
- Takhle vyjadřujeme čísla v matematice běžně.
- Nevýhoda: v počítači máme pro zobrazení k dispozici jen binární číslice 0, 1.
- Běžně dodržovaná dohoda:
  - 0 ≈ +, 1 ≈ -.
  - Nevýhoda: jinak se musí při aritmetických operacích pracovat se znaménkovým bitem, jinak s bity hodnoty.
- Jiná nevýhoda: máme 2 různá vyjádření nuly.

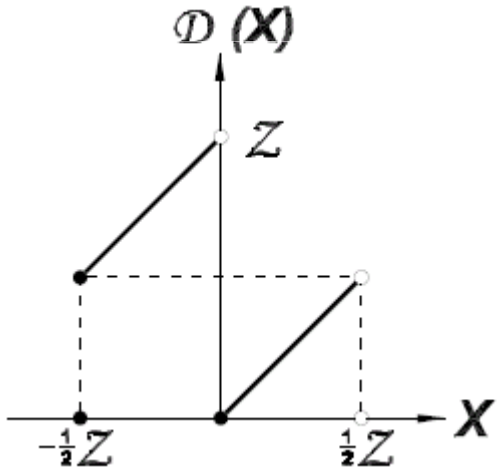


HW/SW interfejs

- V programovacím jazyce C se celým číslům bez znaménka říká *unsigned integers* a v programu se deklarují jako `unsigned int`.
- Těm se znaménkem se říká *integers* a v programu se deklarují jako `signed int`.

Čísla INTEGER se znaménkem II.

- Jiná možnost: část (typicky polovinu) stavů položky HODNOTA použijme pro reprezentaci čísel kladných, druhou polovinu pro reprezentaci čísel záporných.
- Méně výhodná varianta: **inverzní kód,**
- Výhodnější varianta: **dvojkový doplněk.**
- Proč výhodnější? Úspora v HW!
- Poznámka: oba kódy vůbec nejsou omezeny na dvojkovou soustavu, stejně je můžeme použít např. v soustavě desítkové!
- Na dalším slajdu jsou příklady:



Doplňkový kód - příklady

- Rozumí se **dvojkový doplněk**. Příklady reprezentací:
  - $0_D = 00000000_H$,
  - $1_D = 00000001_H$,
  - $2_D = 00000002_H$,
  - $3_D = 00000003_H$,
  - $-1_D = FFFFFFFF_H$,
  - $-2_D = FFFFFFFE_H$,
  - $-3_D = FFFFFFFD_H$,
- Analogii dvojkového doplňku se v soustavě s jiným základem říká doplněk do modulu. Stejně se postupuje třeba v soustavě desítkové (doplněk do „10“).
- Všimněte si: součet dvou opačných čísel se stejnou absolutní hodnotou je 00000000_H.
- Přenos do vyššího řádu (32.) ignorujeme. Sčítáme vlastně mod $2\uparrow 32$.
- Jak je to vlastně v tomto kódování s **přeplněním** řádové mřížky (přetečením)? Budeme diskutovat později…

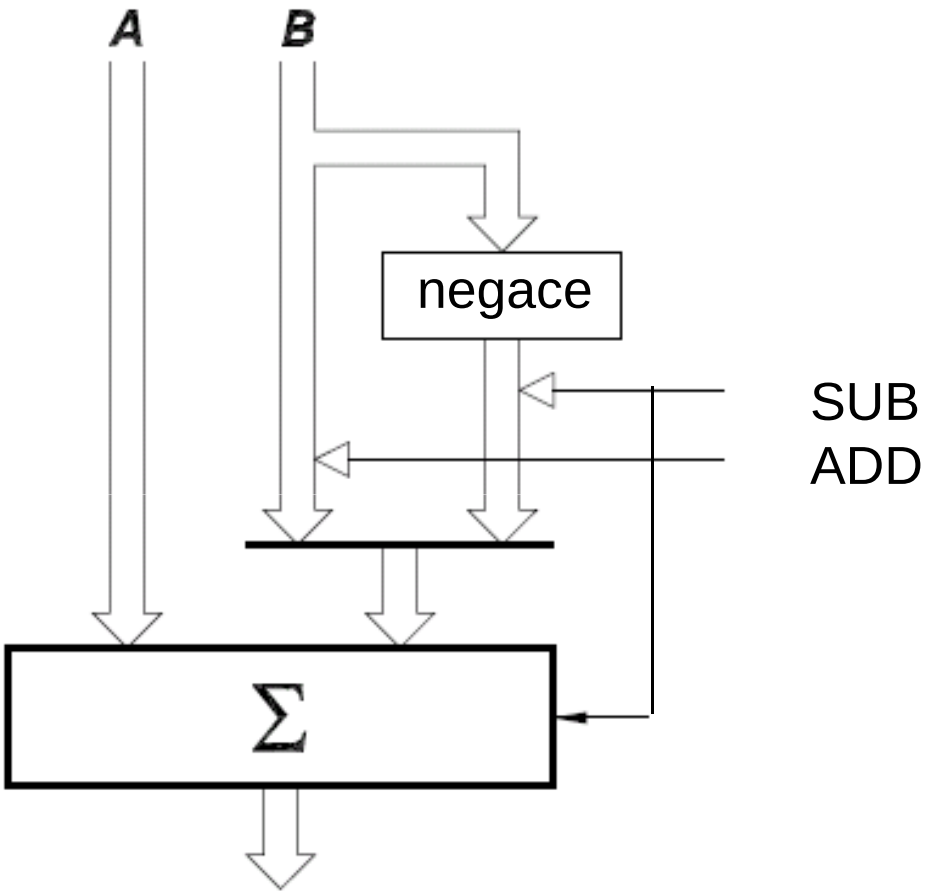
Existuje i jedničkový doplněk

- Jedničkový se od dvojkového doplňku se liší málo, jen o jedničku, o tzv. **horkou jedničku** (Hot-One), kterou přičítáme k nejnižšímu řádu.
- Jedničkový doplněk čísla se (ve dvojkové soustavě) vytvoří bitovou negací.
- Jde o tzv. **inverzní kód**.

Příklad sčítání a odčítání v doplňkovém kódu

- **Sčítání**
  - 0000000 0000 $0111_B \approx 7_D$ Vysvětl.: $0=0_H$, $0=0_B$
  - + 0000000 0000 $0110_B \approx 6_D$
  - 0000000 0000 $1011_B \approx 13_D$
- **Odčítání** je v tomto kódu přičítáním čísla opačného
  - 0000000 0000 $0111_B \approx 7_D$
  - + FFFFFFF1111 $1010_B \approx -6_D$
  - 0000000 0000 $0001_B \approx 1_D$
- Otázka k opakování: jak jsme vytvořili k číslu ve dvojkové soustavě jeho číslo opačné?

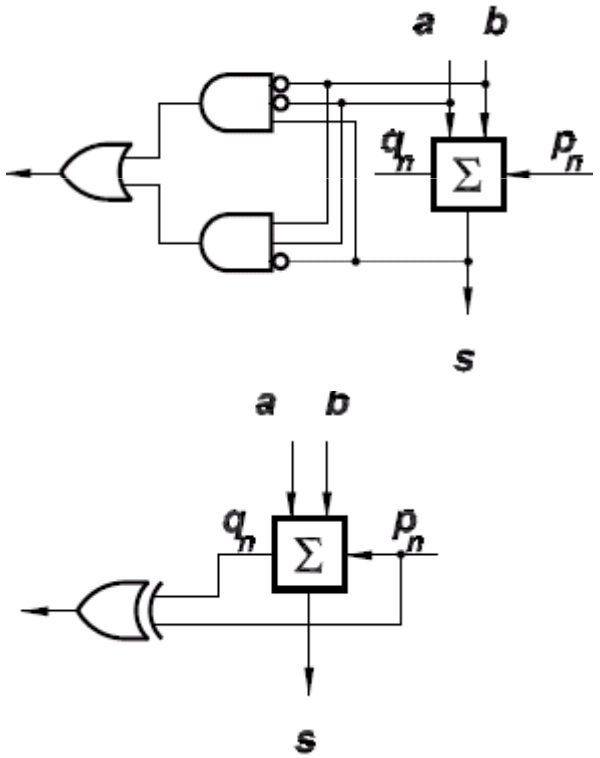
Sčítací/odčítací HW



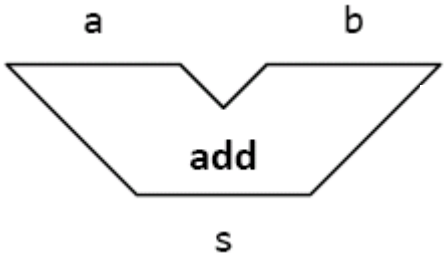
Inspirace: X36JPO, A. Pluháček

Rozumíte pojmu přeplnění?

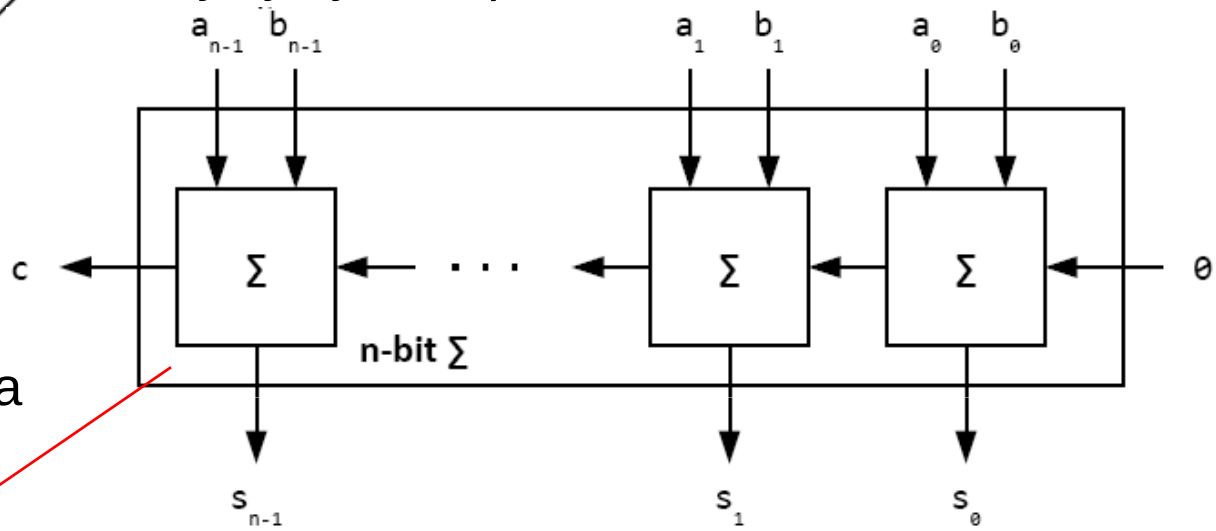
- Říká se tomu také **přetečení**.
- Situace, kdy výsledek operace není správný, protože se nevešel do dané řádové mřížky.
- Ale pozor! V této reprezentaci nenastává, generuje-li se přenos z nejvyššího řádu!
- **Nastává v situaci, kdy znaménko výsledku je jiné, než znaménka operandů, byla-li stejná**, nebo
- Nonekvivalencí přenosu do a z nejvyššího řádu.



Sčítací HW blokově

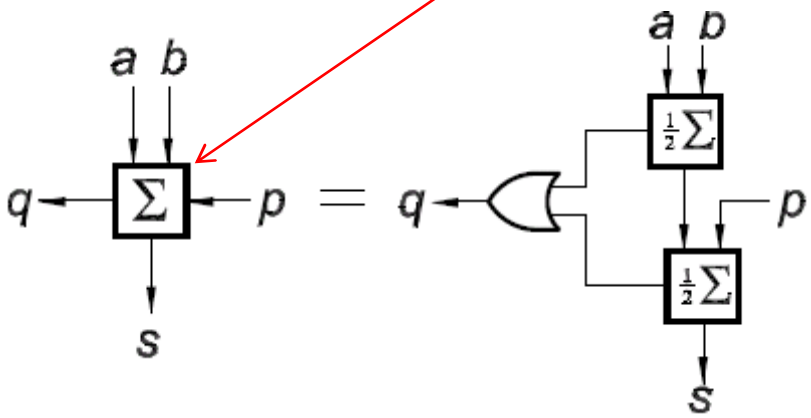


Obvyklý symbol pro funkční blok

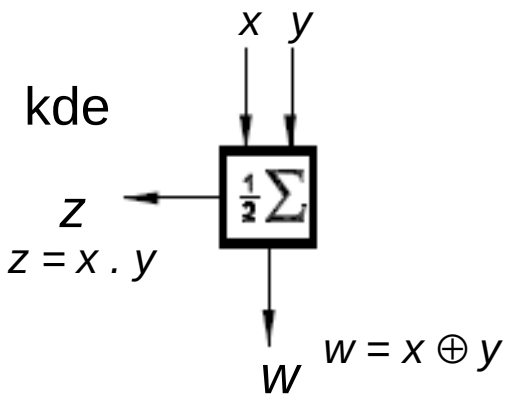


Vnitřní struktura

Realizace



kde

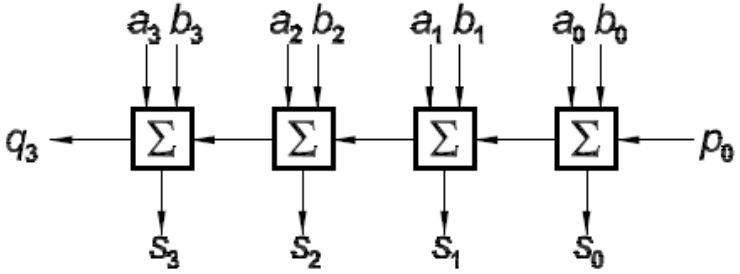


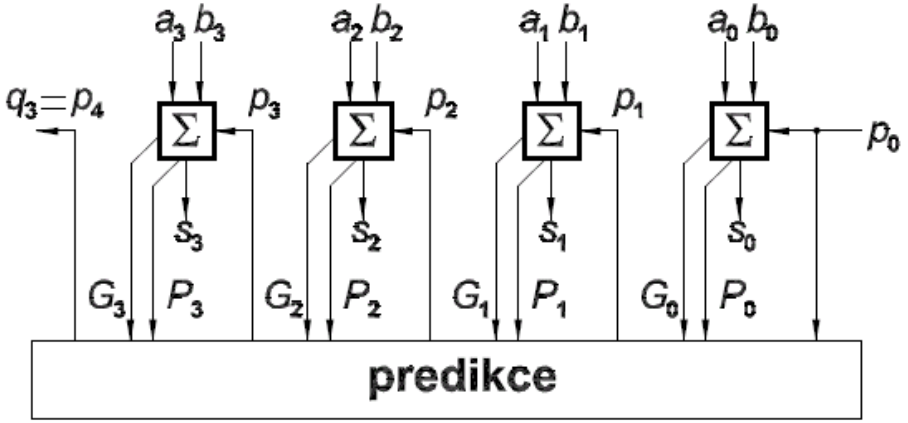
Poznámka k realizaci rychlé paralelní sčítačky

- Paralelní sčítačka s minimálním zpožděním (kombinační obvod) je prakticky nerealizovatelná.
- Pro 64-bitovou verzi bychom potřebovali 10^{20} hradel.
- Proto se staví tak, jak jsme viděli na předchozím slajdu, s postupným přenosem a
- ze dvou půlsčítaček, nebo…

Všimněte si:

- Paralelní sčítačka je **kombinační obvod**. Má tedy smysl mluvit o její rychlosti (ve smyslu: je dost rychlá?)
- Právě naopak, je pomalá! Vysvětlete!
- Zrychlení? Sčítačka s predikcí přenosů - CLA!





CLA?

- CLA – Carry Look-Ahead.
- Sčítačka CLA nabízí dostatečné zrychlení v porovnaní se sčítačkou s postupným přenosem při přijatelném nárůstu ceny HW.
- 64-bitová verze zvýší cenu HW o necelých 50%, ale rychlost se zvýší 9:1.
- To představuje významné zvýšení poměru *rychlost/cena).*

Tyto rovnice jsou klíčové pro pochopení principu…

Označme:

- generování přenosu:

$$g_j = x_j y_j$$

- šíření přenosu (propagation):

$$p_j = x_j \oplus y_j = x_j \bar{y}_j \vee \bar{x}_j y_j$$

Pak:

- součet v j-tem řádu:

$$s_j = c_j \left(\overline{x_j \oplus y_j}\right) \vee \bar{c}_j \left(x_j \oplus y_j\right) = c_j \bar{p}_j \vee \bar{c}_j p_j = p_j \oplus c_j$$

- přenos do vyššího (j+1) řádu:

$$c_{j+1} = x_j y_j \vee \left(x_j \oplus y_j\right) c_j = g_j \vee p_j c_j$$

CLA

Takže platí: $c_1 = g_0 \vee p_0 c_0$

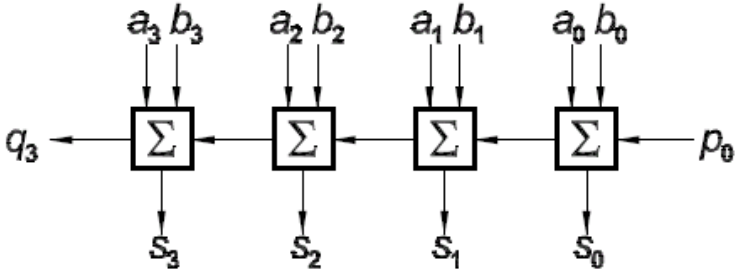
$c_2 = g_1 \vee p_1 c_1 = g_1 \vee p_1(g_0 \vee p_0 c_0) = g_1 \vee p_1 g_0 \vee p_1 p_0 c_0$

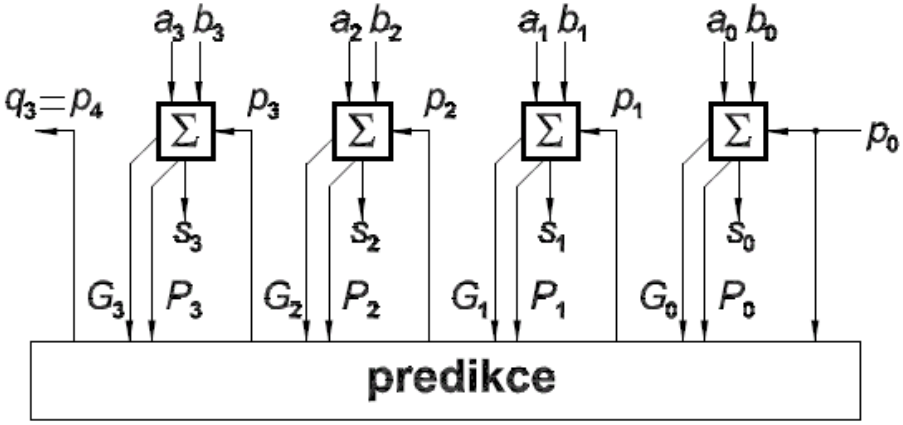
$c_3 = g_2 \vee p_2 c_2 = g_2 \vee p_2(g_1 \vee p_1 g_0 \vee p_1 p_0 c_0) = g_2 \vee p_2 g_1 \vee p_2 p_1 g_0 \vee p_2 p_1 p_0 c_0$

$c_4 = g_3 \vee p_3 c_3 = \ldots = g_3 \vee p_3 g_2 \vee p_3 p_2 g_1 \vee p_3 p_2 p_1 g_0 \vee p_3 p_2 p_1 p_0 c_0$

$c_5 = \ldots$

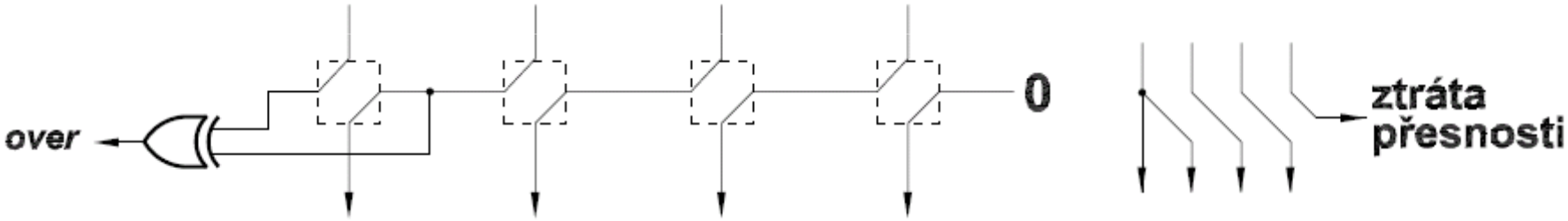
Například rovnici pro c_3 je možné číst následovně: Přenos do 3. řádu nastane, **pokud** přenos byl generován v 2. řádu, **nebo** se 2. řádem šíří a byl generován v 1. řádu, **nebo** se šíří 2. aj 1. řádem a byl generován 0-tým řádem, **nebo** se šíří druhým, prvním aj 0-tým řádem a byl v c_0 (c_0=1).





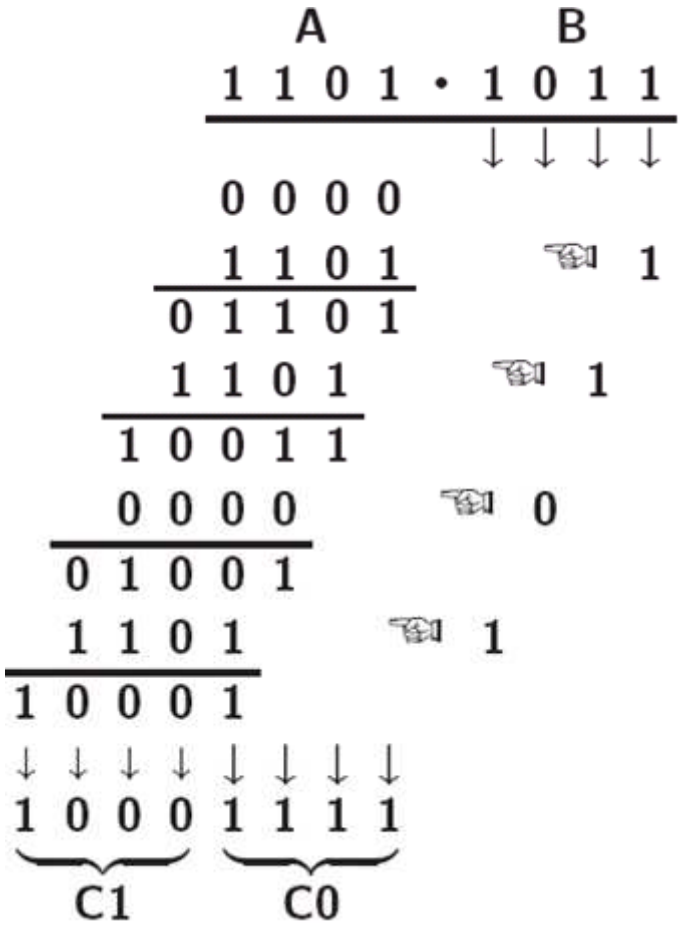
Aritmetické posuny: vlevo, vpravo

- Aritmetický posun v doplňkovém kódu o 1 bit (výsledek má odpovídat přísl. násobení nebo dělení)
- vlevo vpravo

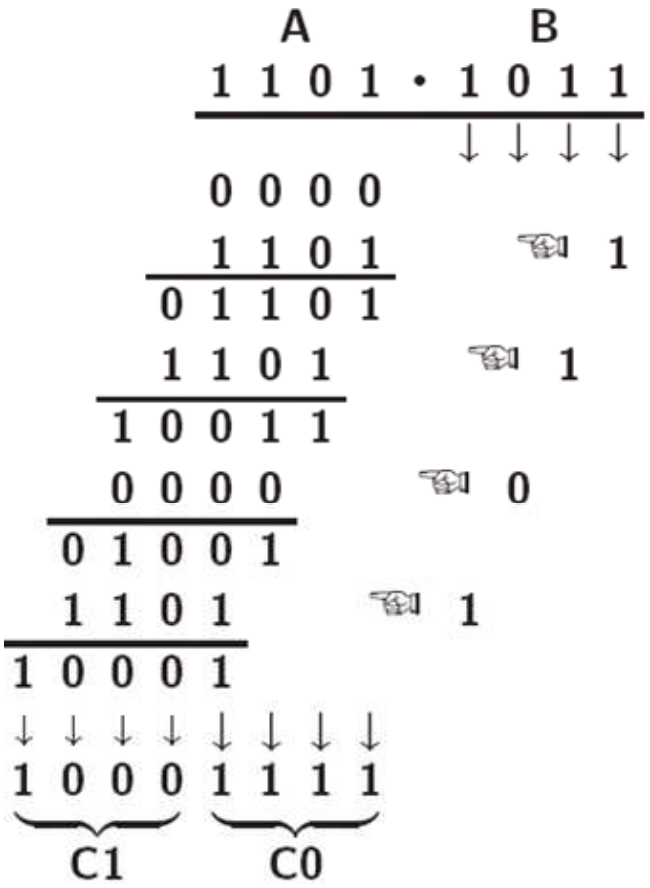


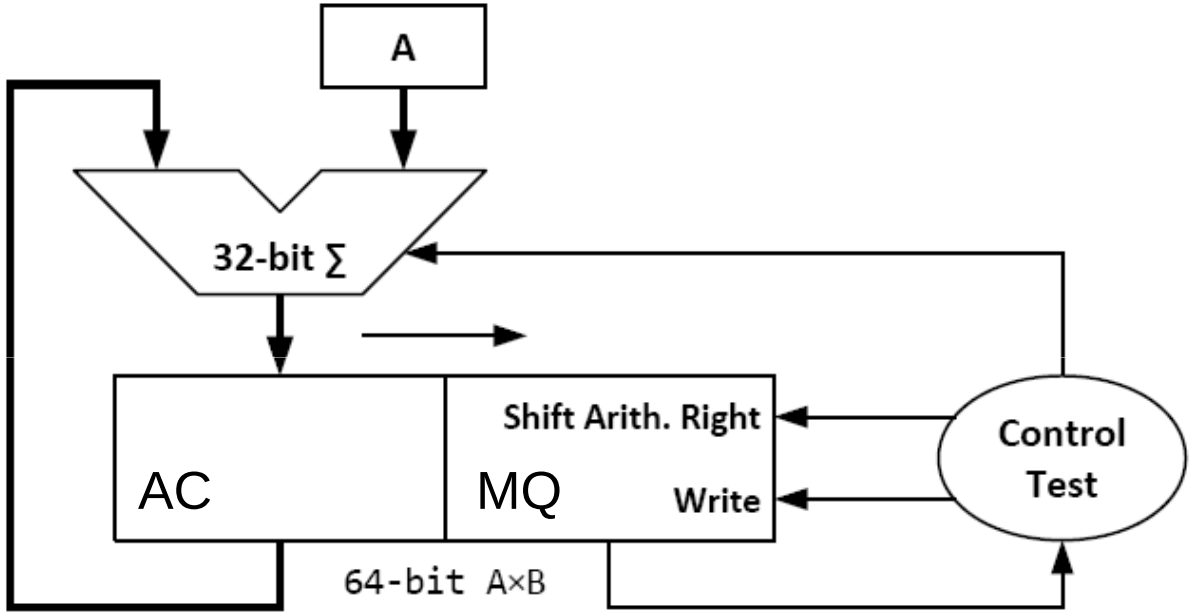
- Aritmetický posuv vs. Logický posuv vs. Cyklický posuv...

Násobení binárních čísel bez znaménka – pro připomenutí



Sekvenční HW násobička (varianta 32b)





Diskuze o rychlosti: ta je ale pomalá, co?

Algoritmus

A = násobenec;
MQ = násobitel;
AC = 0;

for(int i=1; i <= *n*; i++) // *n* je počet bitů
{
  if(MQ_0 = = 1) AC = AC + A; // MQ_0 = nejnižší bit MQ

  SR (posuň registr AC MQ o jedno místo doprava a doplň případný přenos z nejvyššího řádu z předchozího kroku)
}
end.

Nyní je výsledek v AC MQ.

Příklad x.y

Násobenec x=110 a násobitel y=101.

i	operace	AC	MQ	A	komentář
		000	101	110	prvotní nastavení
1	AC = AC+MB	110	101		začátek cyklu
	SR	011	010		
2	nic	011	010		protože MQ_0 = = 0
	SR	001	101		
3	AC = AC+MB	111	101		
	SR	011	110		konec cyklu

Tedy: x×y = 110×101 = 011110, (6×5 = 30)

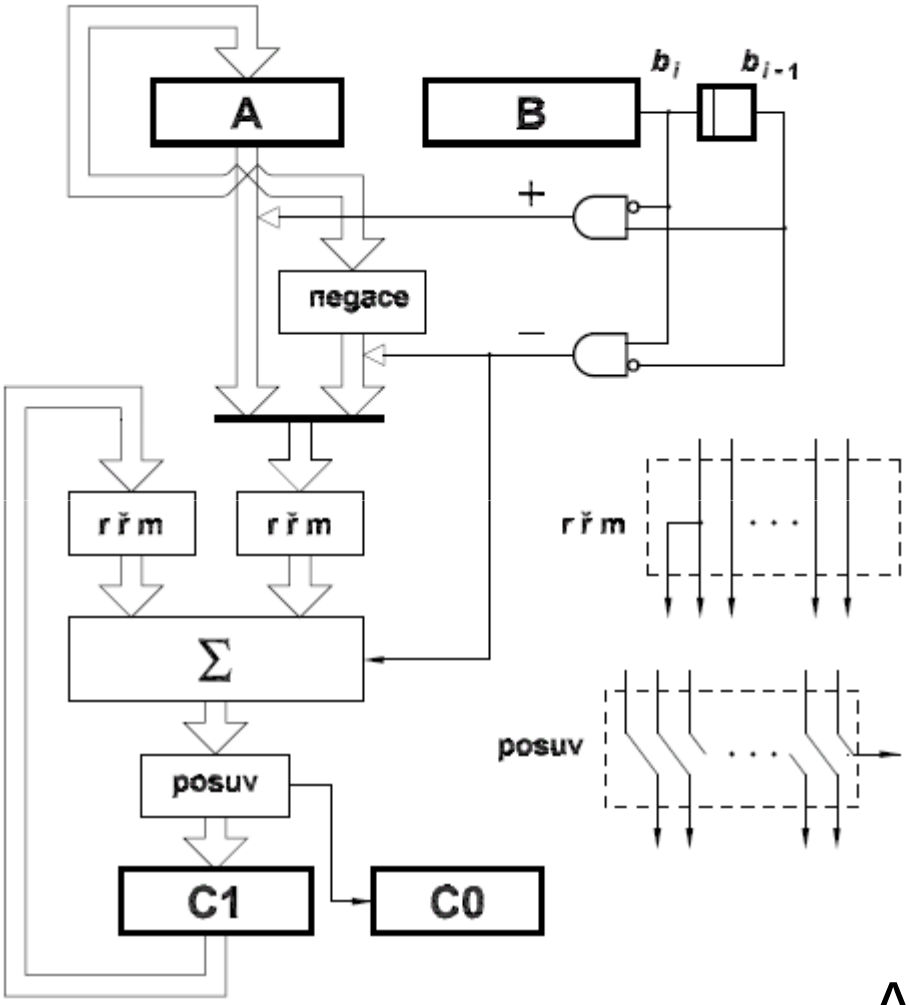
Násobení v doplňkovém kódu

- Lze realizovat, ale je tu problém…
  - **Obraz součinu obecně není roven součinu obrazů!**
- Řešení spočívá v modifikaci dvojkové soustavy na soustavu s relativními číslicemi $0,\ 1,\ \hat{1} = -1$
- Podrobnosti už jsou mimo zamýšlený rozsah APO.

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{př.:} & 1\,\hat{1}\,1\,0 & \sim & 1\cdot 8 + (-1)\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 6 \\
 & \hat{1}\,1\,\hat{1}\,0 & \sim & (-1)\cdot 8 + 1\cdot 4 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 1 = -6 \\
 & 1\,1\,0 = 1\,0\,\hat{1}\,0 = 1\,\hat{1}\,1\,0 & \sim & 6
\end{array}
$$

- Nebo v znaménkovém rozšíření na 2N bitů a násobení obvyklým způsobem. Z výsledku bereme pouze 2N bitů. -> „ruční“ násobení

Násobička v doplňkovém kódu Boothova metoda



APO – jen pro informaci

Rychlá násobička podle Walaceova stromu

Q=X .Y, X a Y nechť jsou 8b čísla

(x_7 x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0). (y_7 y_6 y_5 y_4 y_3 y_2 y_1 y_0) =

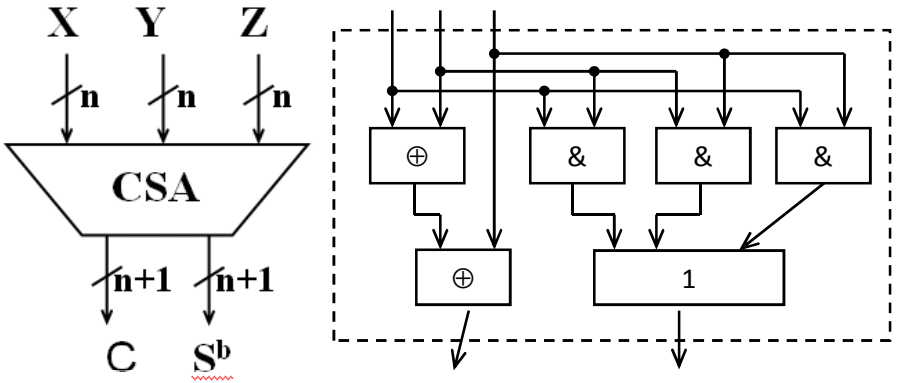
0	0	0	0	0	0	0	0	x_7y_0	x_6y_0	x_5y_0	x_4y_0	x_3y_0	x_2y_0	x_1y_0	x_0y_0	P0
0	0	0	0	0	0	0	x_7y_1	x_6y_1	x_5y_1	x_4y_1	x_3y_1	x_2y_1	x_1y_1	x_0y_1	0	P1
0	0	0	0	0	0	x_7y_2	x_6y_2	x_5y_2	x_4y_2	x_3y_2	x_2y_2	x_1y_2	x_0y_2	0	0	P2
0	0	0	0	0	x_7y_3	x_6y_3	x_5y_3	x_4y_3	x_3y_3	x_2y_3	x_1y_3	x_0y_3	0	0	0	P3
0	0	0	0	x_7y_4	x_6y_4	x_5y_4	x_4y_4	x_3y_4	x_2y_4	x_1y_4	x_0y_4	0	0	0	0	P4
0	0	0	x_7y_5	x_6y_5	x_5y_5	x_4y_5	x_3y_5	x_2y_5	x_1y_5	x_0y_5	0	0	0	0	0	P5
0	0	x_7y_6	x_6y_6	x_5y_6	x_4y_6	x_3y_6	x_2y_6	x_1y_6	x_0y_6	0	0	0	0	0	0	P6
0	x_7y_7	x_6y_7	x_5y_7	x_4y_7	x_3y_7	x_2y_7	x_1y_7	x_0y_7	0	0	0	0	0	0	0	P7
Q_{15}	Q_{14}	Q_{13}	Q_{12}	Q_{11}	Q_{10}	Q_9	Q_8	Q_7	Q_6	Q_5	Q_4	Q_3	Q_2	Q_1	Q_0	

Součtem P0+P1+...+P7 získáme výsledek součinu X a Y.

Q = X .Y = P0 + P1 + ... + P7

Rychlá násobička podle Walaceova stromu

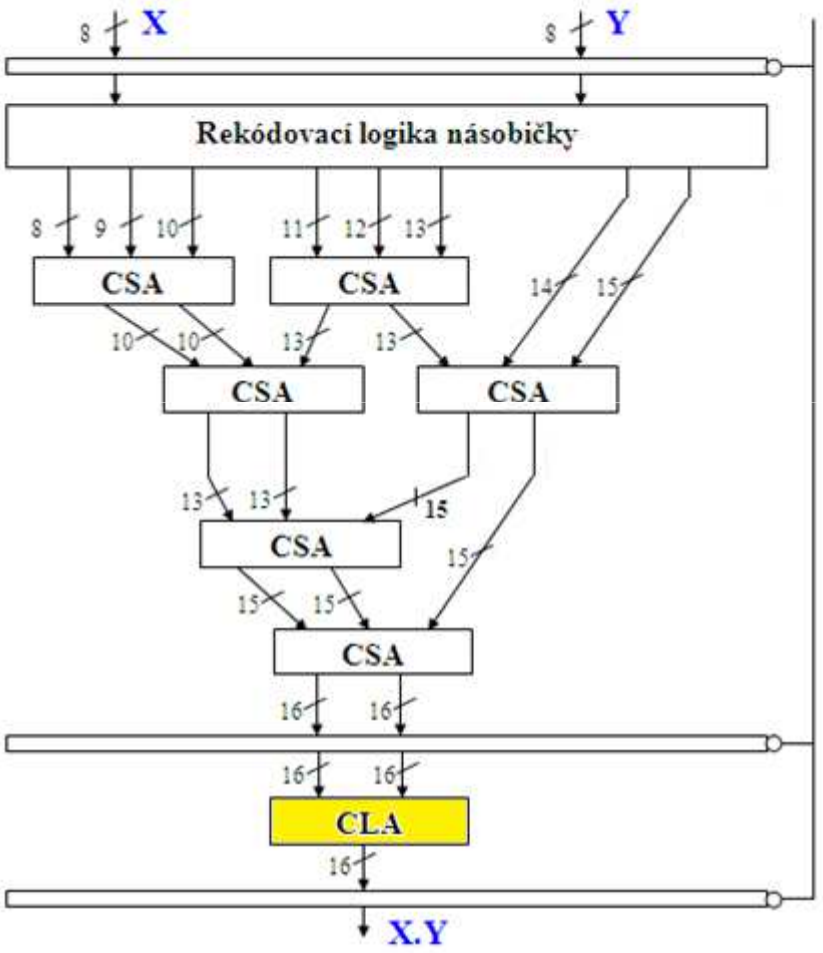
Jejím stavebním prvkem je sčítačka s uchováním přenosu CSA (Carry Save Adder)



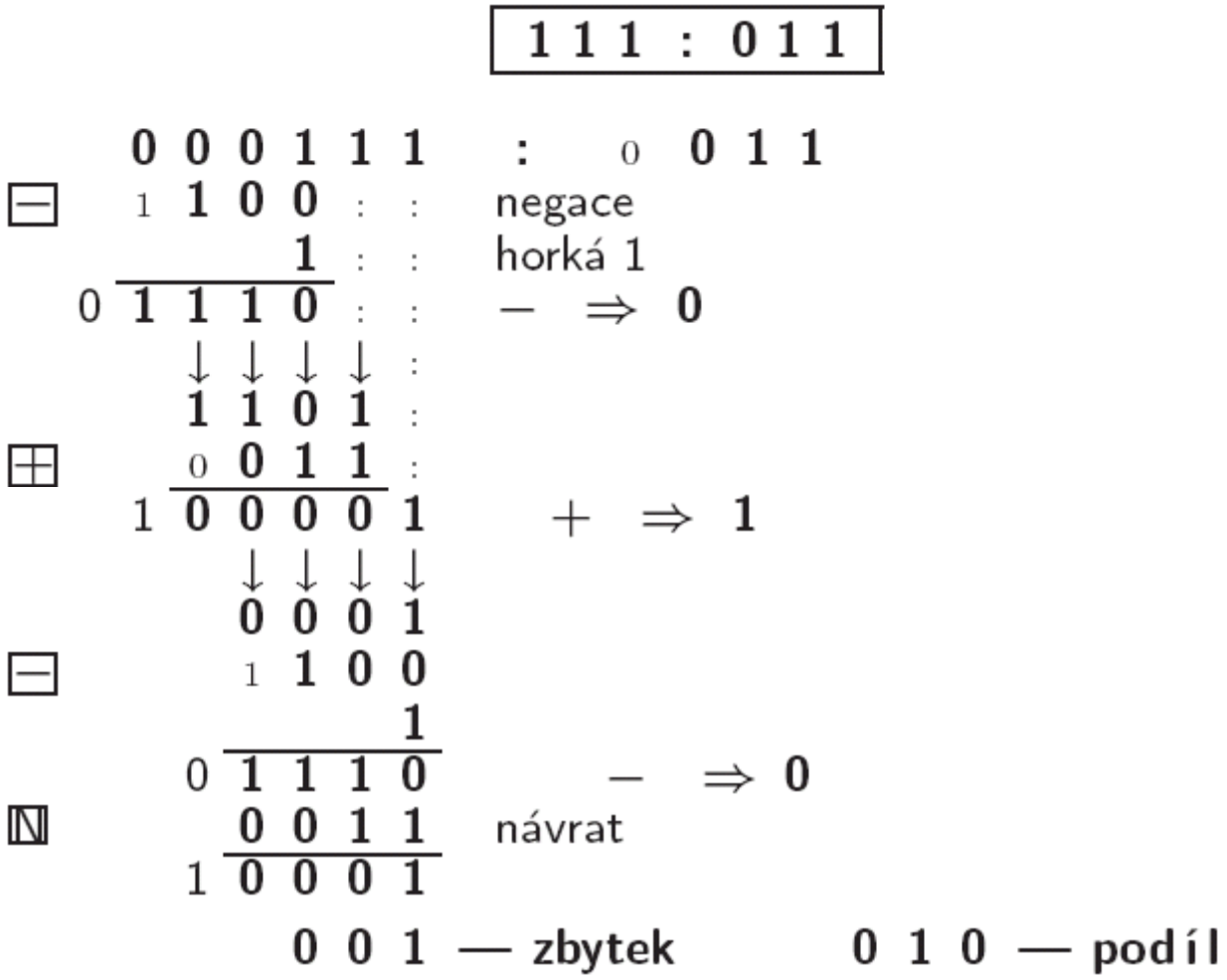
$$S = S^b + C$$

$$S^b_i = x_i \oplus y_i \oplus z_i$$

$$C_{i+1} = x_i y_i + y_i z_i + z_i x_i$$



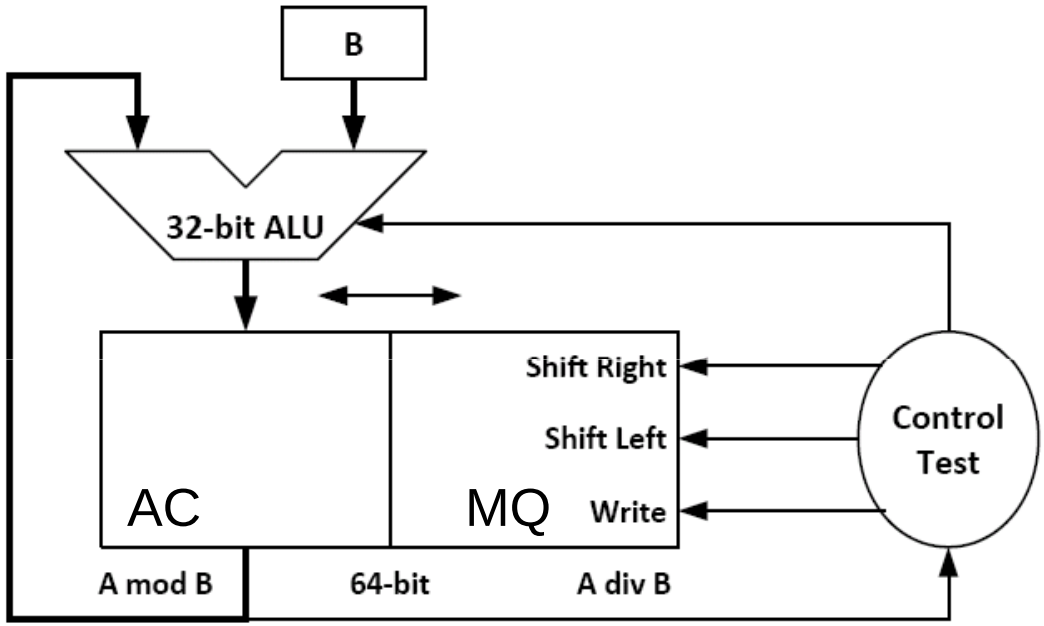
HW dělička – algoritmus dělení



Sekvenční HW dělička (varianta 32b)

111 : 011 dělenec = podíl×dělitel + zbytek

```
        0 0 0 1 1 1   :   0 0 1 1
⊟       1 1 0 0   :   :   negace
              1   :   :   horká 1
    0   1 1 1 0   :   :   −  ⇒  0
        ↓ ↓ ↓ ↓   :
        1 1 0 1   :
⊞       0 0 1 1   :
    1   0 0 0 0 1     +  ⇒  1
        ↓ ↓ ↓ ↓
        0 0 0 1
⊟         1 1 0 0
                1
        0   1 1 1 0       −  ⇒  0
N         0 0 1 1   návrat
        1   0 0 0 1

            0 0 1 — zbytek        0 1 0 — podíl
```



Algoritmus dělení

MQ = dělenec;
B = dělitel; (Podmínka: dělitel různý od 0!)
AC = 0;

```
for( int i=1; i <= n; i++)          {
   SL (posuň registr AC MQ o jednu pozici vlevo, přičemž vpravo se připíše nula)
   if(AC >= B)   {
         AC = AC – B;
         MQ0 = 1;        // nejnižší bit registru MQ se nastaví na 1
    }
}
```

→ Nyní registr MQ obsahuje podíl a zbytek je v AC

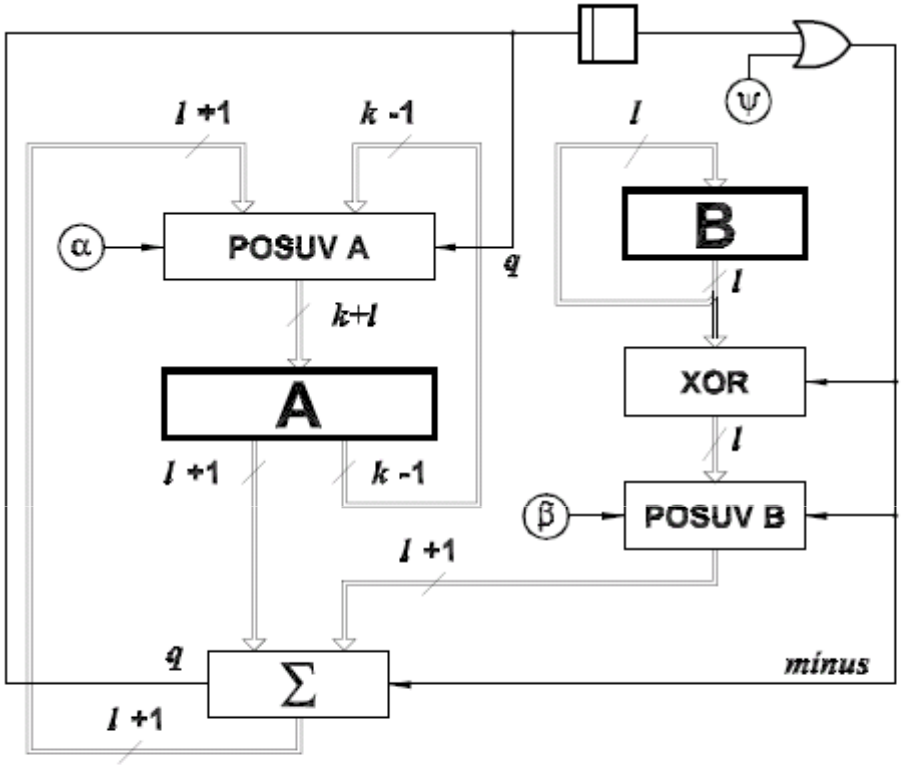
Příklad x/y

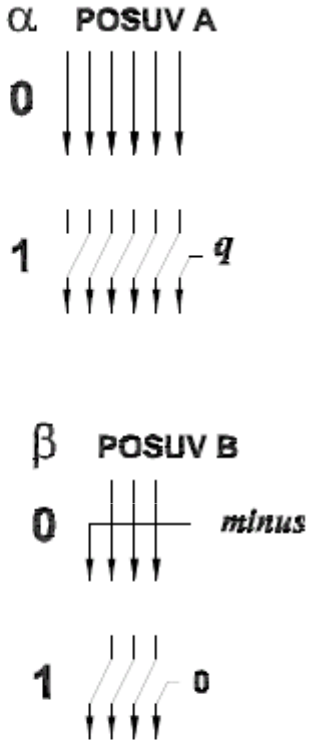
Dělenec x=1010 a dělitel y=0011

i	operace	AC	MQ	B	komentář
		0000	1010	0011	prvotní nastavení
1	**SL**	0001	0100		
	nic	0001	0100		podmínka if není splněna
2	**SL**	0010	1000		
		0010	1000		podmínka if není splněna
3	**SL**	0101	0000		r ≥ y
	AC = AC – B; MQ_0 = 1;	0010	0001		
4	**SL**	0100	0010		r ≥ y
	AC = AC – B; MQ_0 = 1;	0001	0011		konec cyklu

x : y = 1010 : 0011 = 0011 zbytek 0001, (10 : 3 = 3 zbytek 1)

Dělička celých čísel - blokově



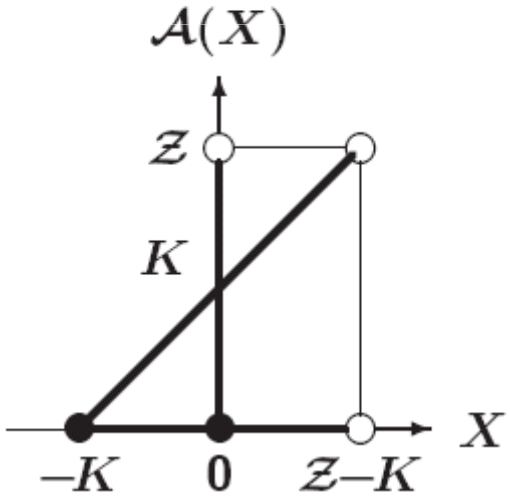


	α	β	ψ
1. takt	1	0	1
další takty	1	0	0
návrat	0	1	0

l (popř. $l+1$) taktů
podíl . . . nižší řády A
zbytek . . . vyšší řády A

Čísla INTEGER se znaménkem III.

- Je i jiná možnost pro zobrazení čísel se znaménkem?
- Ano, dokonce často používaná (viz dále):
- **kód aditivní** (jinak zvaný s posunutou nulou).



$$K = \frac{1}{2}\mathcal{Z} - 1$$

Připomenutí: *Z* je modul

Sčítání a odčítání v aditivním kódu

- Platí:

$$\mathcal{A}(A+B) = \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(B) - K$$
$$\mathcal{A}(A-B) = \mathcal{A}(A) - \mathcal{A}(B) + K$$

- Detekce přeplnění
  - sčítání: stejná znaménka sčítanců a jiné znaménko výsledku,
  - odčítání: znaménka menšence a menšitele se liší a liší se znaménka menšence a výsledku.

Iterační dělička - Goldschmidt

$$Q = \frac{N}{D}$$

Předpoklad: 0,5 ≤ N < D < 1 (tzn. normalizovaný tvar)

$$Q = \frac{N * F_0 * F_1 * F_2 * F_3 \ldots}{D * F_0 * F_1 * F_2 * F_3 \ldots}$$

Pokud budeme volit Fi tak, aby jmenovatel konvergoval k 1, bude čitatel konvergovat k Q.

Z podmínky: 0,5 ≤ D < 1 můžeme D přepsat do tvaru: D=1-x

Zvolme F_0=1+x. Potom $D*F_0 = (1-x)*(1+x) = 1-x^2$

Zvolme F_1=1+x^2. Potom $D*F_0*F1 = (1-x^2)*(1+x^2) = 1-x^4$

$$Q = N(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^i}), kde \qquad x = 1-D$$

Jak se v počítači zobrazují čísla typu REAL?

- Vědecká, neboli semilogaritmická notace.
  - Dvojice: EXPONENT (E), ZLOMKOVÁ část (nazývaná též mantisa M).
- Notace je normalizovaná.
  - Zlomková část vždy začíná binární číslicí 1,
  - Obecně: nenulovou číslicí.

HW/SW interfejs

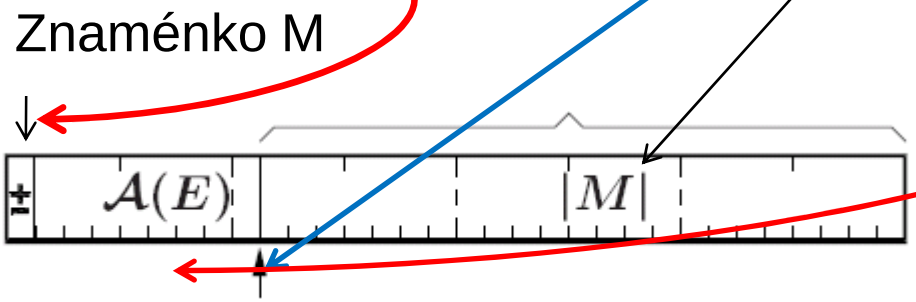
- Normalizováno jako IEEE754 ve verzích
  - Jednoduchá,
  - Dvojnásobná přesnost.
- V programovacím jazyce C se deklaruje jako `float a double`.

Příklady

- -2.34×10^{56} ← normalized
- $+0.002 \times 10^{-4}$ ← not normalized
- $+987.02 \times 10^{9}$ ← not normalized

binárně

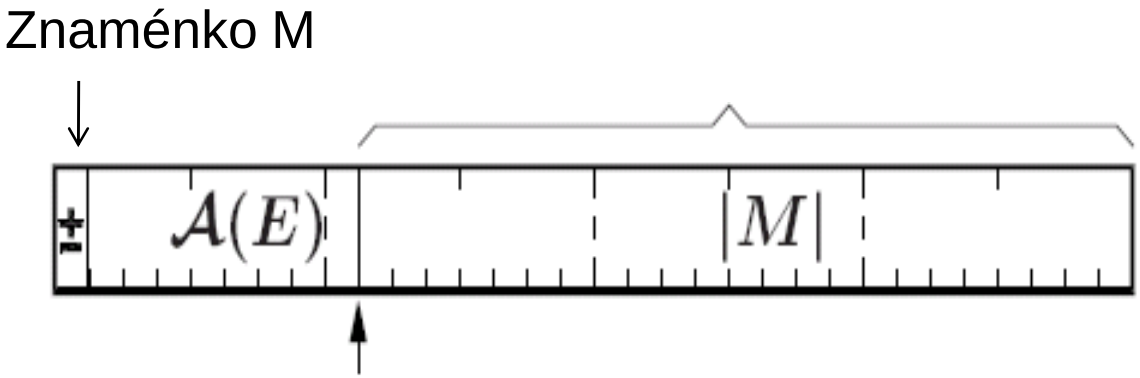
- $\pm 1.xxxxxxx_2 \times 2^{yyyy}$



Poloha řádové čárky (tečky) pro E i M

Formát čísla v pohyblivé řádové čárce

- Kód mantisy: přímý kód — znaménko a absolutní hodnota
- Kód exponentu: aditivní kód (s posunutou nulou).



Poloha řádové čárky (tečky) pro E i M

Příklady reprezentace některých důležitých hodnot

Nula

Kladná nula	0 00000000 00000000000000000000000	+0.0
Záporná nula	1 00000000 00000000000000000000000	-0.0

Nekonečno

Kladné nekonečno	0 11111111 00000000000000000000000
Záporné nekonečno	1 11111111 00000000000000000000000

Některé krajní hodnoty

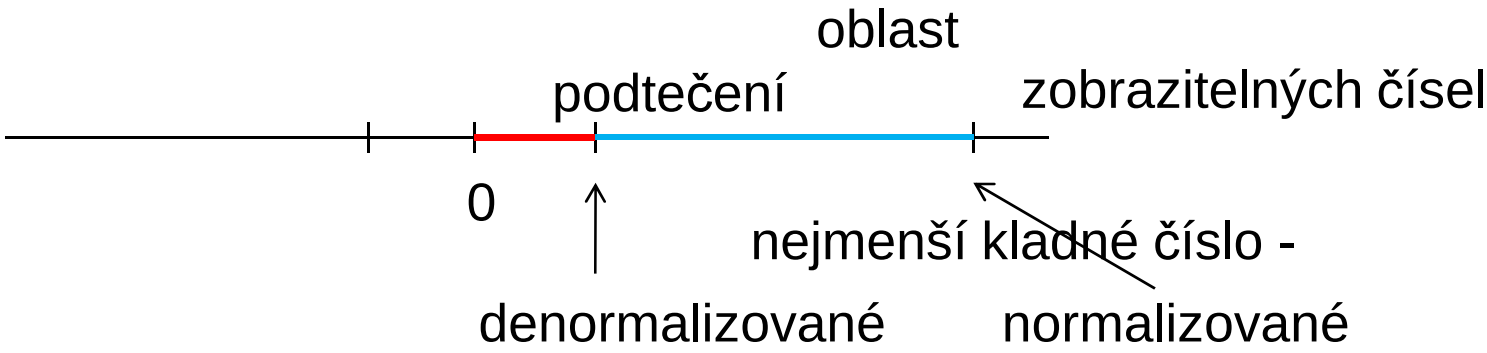
Nejmenší normalizované číslo	* 00000001 00000000000000000000000	$\pm 2^{(1-127)}$
Největší denormalizované číslo	* 00000000 11111111111111111111111	$\pm(1-2^{-23})*2^{-126}$
Nejmenší denormalizované číslo	* 00000000 00000000000000000000001	$\pm 2^{-23}*2^{-126}$

Denormalizované číslo?

- Smyslem zavedení denormalizovaných čísel je rozšíření reprezentovatelnosti čísel, která se nacházejí blíže k nule, tedy čísel velmi malých (v následujícím obrázku oblast označena modře).
- Denormalizovaná čísla mají nulový exponent a i skrytý bit před řádovou čárkou je implicitně nulový.
- Cenou je nutnost speciálního ošetření případu nulový exponent, nenulová mantisa.

Podtečení

- Jde o situaci, kdy zobrazované číslo není rovno nule, ale nedosahuje hodnoty nejmenšího zobrazitelného normalizovaného čísla.
- Mnoha podtečením lze předejít právě implementací čísel denormalizovaných.



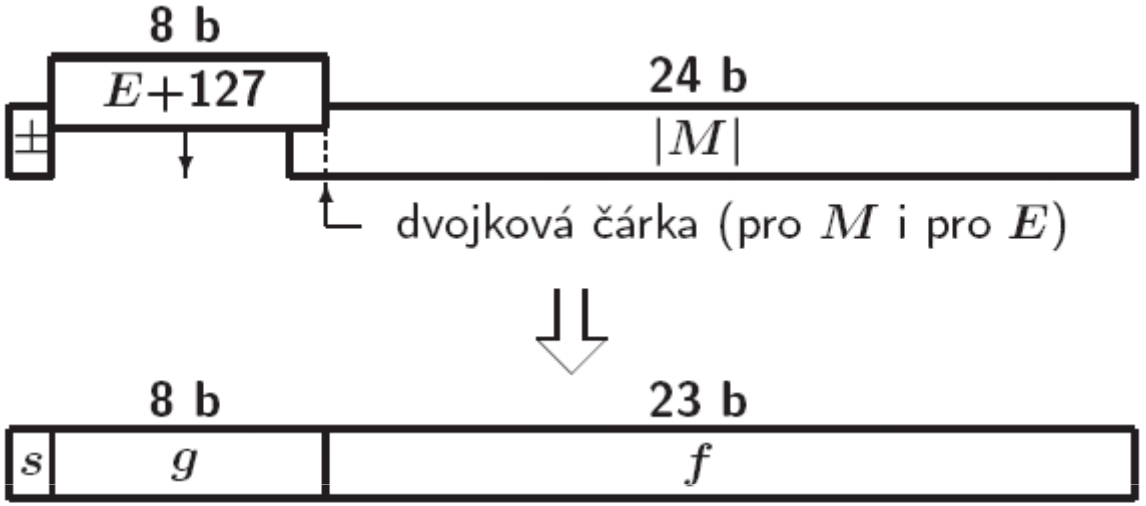
NaN

- Samé jedničky v exponentu,
- Mantisa je nenulová.
- V tom případě není bitový řetězec obrazem žádného čísla, anglicky Not-a-Number, Nan.

Shrnutí – zobrazitelná čísla a výjimky

s-bit	Obraz exponentu	m	význam
0	0<e<255	>0	normalizované kladné číslo
1	0<e<255	>0	normalizované záporné číslo
0	0	>0	denormalizované kladné číslo
1	0	>0	denormalizované záporné číslo
0	0	0	kladná nula
1	0	0	záporná nula
0	255	0	kladné nekonečno (overflow)
1	255	0	záporné nekonečno (overflow)
0	255	≠0	NaN – not a number – nečíselná hodnota
1	255	≠0	NaN – not a number – nečíselná hodnota

ANSI/IEEE Std 754-1985 formáty – 32b a 64b



ANSI/IEEE Std 754-1985 — dvojity format — 64b

g . . . 11b *f* . . . 52b

Skrytý bit

- Nejvyšší platný bit mantisy (který se do bitové reprezentace operandu neukládá) je
- závislý na hodnotě obrazu exponentu. Jestliže je obraz exponentu nenulový, je tento bit
- 1, mluvíme o **normalizovaných** číslech. Na druhou stranu jestliže je obraz
- exponentu nulový, je skrytý bit 0.
- Pak mluvíme o **denormalizovaném** čísle.

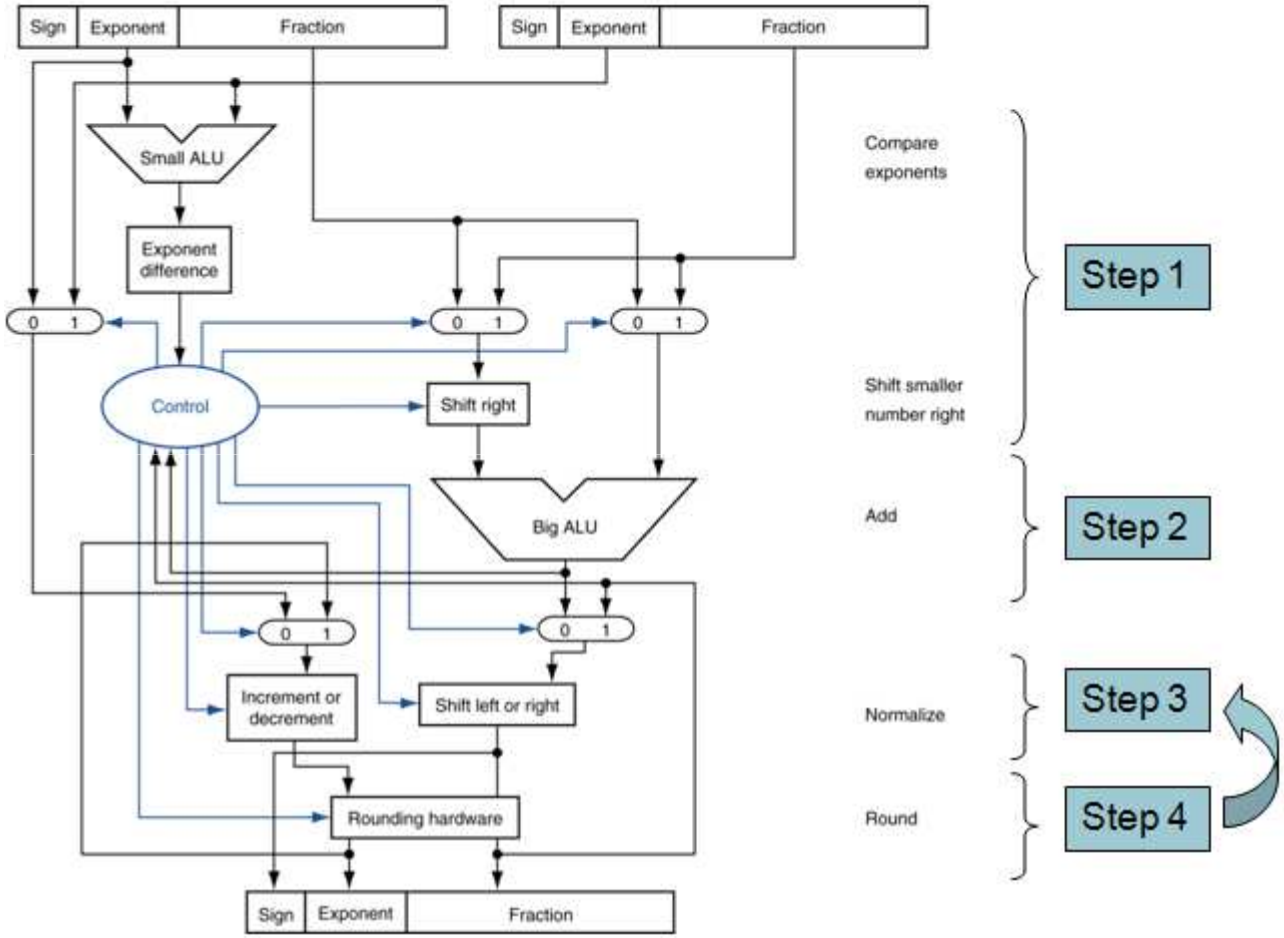
Porovnání dvou čísel ve FP

- Porovnání: je-li $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$.
- Obrazy čísel A a B se odečtou jako čísla v přímém kódu a v pevné řádová čárce.
- To je výhodou zvoleného zobrazení čísel.

Algoritmus sčítání v pohyblivé řádové čárce

- Odečteme exponenty.
- Mantisu čísla s menším exponentem posuneme doprava o počet bitů, který je roven rozdílu exponentů.
- Sečteme mantisy obou čísel.
- Určíme počet nul mezi řádovou čárkou a první platnou číslicí součtu mantis.
- Posuneme součet doleva o tolik míst, kolik nul bylo nalezeno za řádovou čárkou.
- Zmenšíme původní exponent o počet nalezených nul.
- Zaokrouhlíme.

HW FP sčítačky



Násobení čísel v pohyblivé řádové čárce

- Exponenty sečteme.
- Mantisy vynásobíme.
- Normalizujeme.
- Zaokrouhlíme.

- HW FP násobičky je srovnatelně složitý, jako FP sčítačky. Jen má namísto sčítačky násobičku.

Najdete všechny chyby v programu?

Chceme napsat program pro zjištění součtu:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2}$$

```
#include <stdio.h>
int main()
{
  int i, sum=0;
  for(i=1; i<= 10^10; i++)
    sum += 1/i*i;
  printf("Soucet je: %d",sum);
  return 0;
}
```

Najdete všechny chyby v programu?

- Který způsob je nejvýhodnější?

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=N}^{1} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(N-i+1)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{10^{10}} \frac{1}{i^2} \approx 1.6449340578301865,$$

$$\sum_{i=10^{10}}^{1} \frac{1}{i^2} \approx 1.6449340667482264$$

typ double pro oba případy.. Proč se liší?

Překvapení na závěr ???

```
#include <stdio.h>
int main()
{
  float x;
  x = 116777215.0;  printf("%.3lf\n", x);
  x = 116777216.0;  printf("%.3lf\n", x);
  x = 116777217.0;  printf("%.3lf\n", x);
  x = 116777218.0;  printf("%.3lf\n", x);
  x = 116777219.0;  printf("%.3lf\n", x);
  x = 116777220.0;  printf("%.3lf\n", x);
  x = 116777221.0;  printf("%.3lf\n", x);
  return 0;
}
```