

KAPITOLA 9: Riemannův integrál

určitý integrál

motivace: výpočet obsahu plochy pod grafem funkce

9.1 Úvod

(nejdříve jen pro $a < b$)

Definice:

řekneme, že množina $\mathcal{D} \subset \langle a, b \rangle$ je **dělením intervalu** $\langle a, b \rangle$, jestliže je konečná a $a, b \in \mathcal{D}$.

Prvky dělení $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ číslujeme tak, že platí

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Pro funkci f omezenou na $\langle a, b \rangle$ označíme

$$m_{i,\mathcal{D}} = \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x), \quad M_{i,\mathcal{D}} = \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x).$$

Definice:

Je-li f funkce omezená na $\langle a, b \rangle$ a $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, pak čísla

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n m_{i,\mathcal{D}} \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n M_{i,\mathcal{D}} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

nazýváme **dolním** a **horním Riemannovým** (integrálním) **součtem** funkce f na $\langle a, b \rangle$.

Věta 9.1:

Pro každé dělení \mathcal{D} intervalu $\langle a, b \rangle$ platí

$$(b-a) \cdot \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \leq \underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}) \leq (b-a) \cdot \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x).$$

Důkaz: Zřejmě platí $\underline{S}(f, \mathcal{D}) \geq \sum_{i=1}^n \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) (x_i - x_{i-1}) = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \cdot (b-a)$.

Podobně dostáváme i poslední nerovnost. Nerovnost $\underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D})$ vyplývá přímo z definice.

Definice:

Dělení \mathcal{D}' intervalu $\langle a, b \rangle$ nazýváme **zjemněním** dělení \mathcal{D} intervalu $\langle a, b \rangle$, je-li $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$.

Poznámka:

Je-li $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cup \{\tilde{x}\}$, kde $\tilde{x} \notin \mathcal{D}$, pak zřejmě platí

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}_1) \geq \underline{S}(f, \mathcal{D}) \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, \mathcal{D}_1) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Uvědomíme-li si nyní, že jakékoliv zjemnění \mathcal{D}' dělení \mathcal{D} lze získat z dělení \mathcal{D} postupným přidáváním jednoho bodu, dostaneme, že i pro toto obecné zjemnění platí

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}') \geq \underline{S}(f, \mathcal{D}) \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, \mathcal{D}') \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Věta 9.2:

Jsou-li $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, pak

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}_1) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}_2).$$

Důkaz: Dělení $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ je zjemněním obou dělení \mathcal{D}_1 a \mathcal{D}_2 . Tedy $\underline{S}(f, \mathcal{D}_1) \leq \underline{S}(f, \mathcal{D}') \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}') \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}_2)$.

Definice:

Je-li

$$\sup\{\underline{S}(f, \mathcal{D}) \mid \mathcal{D} \text{ dělení } \langle a, b \rangle\} = \inf\{\overline{S}(f, \mathcal{D}) \mid \mathcal{D} \text{ dělení } \langle a, b \rangle\} = I,$$

pak číslo I nazýváme **Riemannovým** (určitým) **integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a píšeme

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad \left(\text{případně } (R)\int_a^b f(x) dx \text{ nebo stručně jen } \int_a^b f \right).$$

(používané názvy: $a \dots$ dolní mez; $b \dots$ horní mez; $f \dots$ integrand)**Poznámka:**

Riemannův integrál je definován jen pro funkce omezené - pro jiné funkce totiž není definován horní a dolní Riemannův součet.

Poznámka:

Jak uvidíme ve Větě 9.6, nemá na existenci a hodnotu Riemannova integrálu vliv, změníme-li hodnotu integrované funkce v konečně mnoha bodech. Díky tomu lze připustit, aby integrovaná funkce nebyla v konečně mnoha bodech intervalu definována. Mohou totiž nastat jen dvě možnosti:

- Ať dodefinujeme funkci v bodech, kde nebyla definována, jakýmkoliv způsobem, integrál existovat bude a bude pokaždé stejný.
- Ať dodefinujeme funkci v bodech, kde nebyla definována, jakýmkoliv způsobem, integrál existovat nebude.

Poznámka:Pro každé dělení \mathcal{D} intervalu $\langle a, b \rangle$ zřejmě platí

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

(Samozřejmě za předpokladu, že $\int_a^b f$ existuje.)**Věta 9.3:**Integrál $\int_a^b f(x) dx$ existuje a je roven A právě tehdy, když existuje posloupnost $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^\infty$ dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, \mathcal{D}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, \mathcal{D}_n) = A.$$

Poznámka:Pro $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^\infty$ z Věty 9.3 zřejmě platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f, \mathcal{D}_n) - \underline{S}(f, \mathcal{D}_n)) = 0.$$

Příklad 9.1: Pro $k \in \mathbb{R}$ pevné je $\int_a^b k dx = k \cdot (b - a)$.**Řešení:** Pro libovolné dělení $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ zřejmě platí

$$\begin{aligned} \underline{S}(k, \mathcal{D}) &= \underbrace{\sum_{i=1}^n k(x_i - x_{i-1})}_{k \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})} = \overline{S}(k, \mathcal{D}). \\ &= k \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = k(b - a) \end{aligned}$$

Příklad 9.2: Ukažte, že $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$.

Řešení: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak pro posloupnost dělení $\mathcal{D}_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ (tj. $x_i = \frac{i}{n}$) máme

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{2},$$

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Podle Věty 9.3 tedy uvedená rovnost platí.

Příklad 9.3: Integrál $\int_a^b d(x) \, dx$, kde $d(x)$ je Dirichletova funkce (viz konec odstavce 2.1), neexistuje.

Řešení: Je-li \mathcal{D} libovolné dělení, pak zřejmě platí

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) = 0, \quad \overline{S}(f, \mathcal{D}_n) = 1 \cdot (b - a).$$

Tedy

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}(d, \mathcal{D}) = 0 \neq b - a = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}(d, \mathcal{D}).$$

Příklad 9.4: Ukažte, že $\int_0^1 \operatorname{sgn} x \, dx = 1$.

Řešení: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak pro posloupnost dělení $\mathcal{D}_n = \{0, \frac{1}{n}, 1\}$ máme

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}_n) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \frac{n-1}{n} = 1,$$

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}_n) = 0 \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \frac{n-1}{n} \rightarrow 1.$$

Podle Věty 9.3 tedy uvedená rovnost platí.

Věta 9.4:

Je-li f na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá nebo monotónní, pak existuje $\int_a^b f(x) \, dx$.

9.2 Vlastnosti

Věta 9.5:

Nechť $a < b < c$. Pak $\int_a^c f(x) \, dx$ existuje, právě když existují $\int_a^b f(x) \, dx$ a $\int_b^c f(x) \, dx$, a v tomto případě platí

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

(tzv. aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru).

Definice:

Nechť $a < b$ a existuje $\int_a^b f(x) \, dx$. Pak definujeme

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx.$$

Dále definujeme

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0.$$

Poznámka:

Předpoklad $a < b < c$ ve Větě 8.5 lze nahradit předpokladem existence integrálu $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, kde $\alpha = \min\{a, b, c\}$ a $\beta = \max\{a, b, c\}$.

Věta 9.6:

Nechť existuje $\int_a^b f(x) dx$. Jestliže se g liší od f na $\langle a, b \rangle$ v nejvýše konečně mnoha bodech, pak existuje $\int_a^b g(x) dx$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Poznámka:

Na základě Vět 9.4, 9.5 a 9.6 stačí k existenci $\int_a^b f(x) dx$, když f je na $\langle a, b \rangle$ po částech spojitá (tj. má tam jen konečně mnoho bodů nespojitosti a v nich má konečné jednostranné limity).

Věta 9.7:

Nechť existují $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b g(x) dx$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\text{a) } \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$\text{b) } \int_a^b (c \cdot f)(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Je-li navíc $a < b$, pak

$$\text{c) } \text{je-li } f \geq 0 \text{ na } \langle a, b \rangle, \text{ pak } \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

$$\text{d) } \text{je-li } f \leq g \text{ na } \langle a, b \rangle, \text{ pak } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (\text{tzv. monotonie integrálu}),$$

Důkaz: $g - f \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$, tedy podle a), b), c) je $\int_a^b g - \int_a^b f \stackrel{\text{b)}}{=} \int_a^b g + \int_a^b (-f) \stackrel{\text{a)}}{=} \int_a^b (g - f) \stackrel{\text{c)}}{\geq} 0$.

$$\text{e) } \text{existuje } \int_a^b |f(x)| dx \text{ a platí } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

Důkaz odhadu: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, tedy $-\int_a^b |f| \stackrel{\text{b)}}{=} \int_a^b (-|f|) \stackrel{\text{d)}}{\leq} \int_a^b f \stackrel{\text{d)}}{\leq} \int_a^b |f|$.

$$\text{f) } \text{je-li } |f| \leq M \text{ na } \langle a, b \rangle, \quad A, B \in \langle a, b \rangle, \text{ pak } \left| \int_A^B f(x) dx \right| \leq M |B - A|.$$

Důkaz: 1) pro $\underline{A} = \underline{B}$ zřejmé; 2) pro $\underline{A} < \underline{B}$: $|\int_A^B f| \stackrel{\text{e)}}{\leq} \int_A^B |f| \stackrel{\text{d)}}{\leq} \int_A^B M = M(B - A) = M|B - A|$;

3) pro $\underline{B} < \underline{A}$: $|\int_A^B f| = |-\int_B^A f| = |\int_B^A f| \stackrel{\text{2)}}{\leq} M|A - B| = M|B - A|$.

Věta 9.8 (integrál jako funkce horní meze):

Nechť existuje $\int_a^b f(t) dt$ a $c \in \langle a, b \rangle$. Pak pro funkci

$$F_c(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad x \in \langle a, b \rangle$$

platí:

$$\text{a) } F_c \text{ je spojitá na } \langle a, b \rangle, \quad F_c(c) = 0.$$

$$\text{b) } \text{Je-li } f \text{ spojitá v } x_0 \in \langle a, b \rangle, \text{ pak } F'_c(x_0) = f(x_0).$$

(Existuje-li jen jednostranná limita funkce f v x_0 , pak je rovna odpovídající jednostranné derivaci funkce F v x_0 .)

Poznámka:

Z Věty 8.8 vyplývá, že funkce spojitá na intervalu I má na I primitivní funkci (viz Větu 7.2). Je-li totiž $c \in I$, pak $F_c(x) = \int_c^x f(t) dt$ je primitivní funkcí k f na I . Navíc pro libovolnou primitivní funkci F k f na I platí

$$F(x) = F_c(x) + F(c) = \int_c^x f(t) dt + F(c).$$

Věta 9.9 (Newton-Leibnizova formule):

Jestliže existuje $\int_a^b f(x) dx$ a F je primitivní funkce k f na (a, b) , pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-) - F(a+) \left(= \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \right).$$

Píšeme:

$$F(b-) - F(a+) = [F(x)]_a^b.$$

Poznámka:

Na volbě primitivní funkce ve Větě 9.9 nezáleží. Jsou-li totiž F_1, F_2 primitivní funkce k f na (a, b) , pak existuje $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ tak, že $F_2 = F_1 + \tilde{c}$ na (a, b) , tedy

$$[F_2(x)]_a^b = F_2(b-) - F_2(a+) = (F_1(b-) + \tilde{c}) - (F_1(a+) + \tilde{c}) = F_1(b-) - F_1(a+) = [F_1(x)]_a^b.$$

Příklad 9.5: a) $\int_a^b k dx = [kx]_a^b = kb - ka = k(b - a)$, b) $\int_a^b x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

Příklad 9.6: Pro funkci $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cos x + 3}$ vypočtěte $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.

Řešení: Funkce f je spojitá na $\langle 0, 2\pi \rangle$, tedy integrál existuje. Podle Příkladu 8.20 je $G(x) = \arctg \frac{\tg \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}$ primitivní funkce k f , ovšem pouze na intervalech $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, ne tedy na celém intervalu $(0, 2\pi)$. Musíme proto rozdělit náš integrál na dva:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx = \left[\arctg \frac{\tg \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right]_0^{\pi} + \left[\arctg \frac{\tg \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right]_{\pi}^{2\pi} = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi. \end{aligned}$$

Je také možné použít funkci

$$F(x) = \begin{cases} \arctg \frac{\tg \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} & \text{na } (0, \pi) \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \pi \\ \arctg \frac{\tg \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + \pi & \text{na } (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

která je, opět podle Příkladu 8.20, primitivní funkcí k f na celém intervalu $(0, 2\pi)$. Pak dostaneme

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = F(2\pi-) - F(0+) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \left(\arctg \frac{\tg \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + \pi \right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\arctg \frac{\tg \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right) = \pi - 0 = \pi.$$

Poznámka: Už před výpočtem jsme si mohli všimnout, že funkce f je zdola omezená kladnou konstantou, tedy hledaný integrál musí být kladný. Konkrétněji máme $\frac{\sqrt{2}}{\cos x + 3} \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$, tedy podle Věty 9.7 d) je

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \geq \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{4} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 2\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi > 0.$$

Přitom $G(2\pi-) - G(0+) = 0$, takže kdybychom zapomněli zkontrolovat, zda je G primitivní funkcí k f na celém intervalu $(0, 2\pi)$, mohli bychom takto odhalit chybu, které jsme se dopustili. Bohužel nám takováto kontrola nepomůže vždy. Přesto je dobré si ji udělat.

Poznámka - Newtonův integrál:

Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) a existují-li limity $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$, pak definujeme Newtonův integrál funkce f na (a, b) předpisem

$${}^{(N)}\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \quad (= F(b-) - F(a+))$$

(samozřejmě, jen pokud je rozdíl $F(b-) - F(a+)$ definován). Existují-li Riemannův i Newtonův integrál, pak si jsou rovny.

9.3 Integrace per partes a metoda substituce

kombinace Newton-Leibnizovy formule a metod pro neurčitý integrál

!! při použití metody substituce je zde nutné přepočítat meze integrálu !!

Příklad 9.7: Pro funkci $f(x) = x e^{-\frac{x}{2}}$ vypočtěte $\int_{-2}^4 f(x) dx$.

Řešení: Funkce f je na intervalu $\langle -2, 4 \rangle$ spojitá (tj. i omezená), a tedy integrál existuje.

Máme:

$$\int_{-2}^4 x e^{-\frac{x}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} -\frac{x}{2} = t \\ -\frac{1}{2} dx = dt \\ -2 \rightsquigarrow 1 \\ 4 \rightsquigarrow -2 \end{array} \right| = \int_1^{-2} (-2t) e^t (-2) dt = 4 \int_1^{-2} t e^t dt = -4 \int_{-2}^1 t e^t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = t \quad v' = e^t \\ u' = 1 \quad v = e^t \end{array} \right| \stackrel{\text{PP}}{=} -4 \left([t e^t]_{-2}^1 - \int_{-2}^1 e^t dt \right) = -4 \left((e - (-2)e^{-2}) - (e - e^{-2}) \right) = -12 e^{-2}.$$

Příklad 9.8: Předpokládejme, že existuje $\int_{-a}^a f(x) dx$ ($a \geq 0$) a f je sudá nebo lichá. Rozepišme

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

a dopočítejme první integrál:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = -t \\ dx = -dt \\ 0 \rightsquigarrow 0 \\ -a \rightsquigarrow a \end{array} \right| = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt =$$

$$= \begin{cases} \int_0^a -f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt & \text{pro } f \text{ lichou,} \\ \int_0^a f(t) dt & \text{pro } f \text{ sudou.} \end{cases}$$

Dostaneme tak, že platí

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } f \text{ lichou,} \\ 2 \int_0^a f(t) dt & \text{pro } f \text{ sudou.} \end{cases}$$

(Tohoto využijete v druhém semestru při výpočtu koeficientů Fourierových řad sudých a lichých funkcí.)

Příklad 9.9: Předpokládejme, že f je periodická s periodou T a po částech spojitá na \mathbb{R} . Pak pro $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \beta < T$ a $\alpha = kT + \beta$ platí

Aa)

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\beta+T} f(t) dt &= \int_{\beta}^T f(t) dt + \int_T^{\beta+T} \underbrace{f(t)}_{f(t-T)} dt = \left| \begin{array}{l} u = t - T \\ du = dt \\ T \rightsquigarrow 0 \\ \beta + T \rightsquigarrow \beta \end{array} \right| = \\ &= \int_{\beta}^T f(t) dt + \int_0^{\beta} f(u) du = \int_0^T f(t) dt \end{aligned}$$

(protože nezáleží na označení integrační proměnné v určitém integrálu),

Ab)

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} \underbrace{f(x)}_{f(x-kT)} dx = \left| \begin{array}{l} t = x - kT \\ dt = dx \\ \alpha \rightsquigarrow \alpha - kT = \beta \\ \alpha + T \rightsquigarrow \beta + T \end{array} \right| = \int_{\beta}^{\beta+T} f(t) dt \stackrel{Aa)}{=} \int_0^T f(t) dt.$$

Tedy při integraci periodické funkce nezáleží na tom, přes který interval délky periody integrujeme. Integrál je vždy stejný.

B) Je-li navíc $d \in \mathbb{R}$, pak

$$\int_{\beta}^{\beta+d} \underbrace{f(x)}_{f(x+kT)} dx = \left| \begin{array}{l} t = x + kT \\ dt = dx \\ \beta \rightsquigarrow \beta + kT = \alpha \\ \beta + d \rightsquigarrow \alpha + d \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\alpha+d} f(t) dt.$$

Tedy posun intervalu o násobek periody integrál nezmění.

Příklad 9.10: Vypočtěte $\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) dx$, kde $f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$.

Řešení: Funkce f je spojitá na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$, tedy integrál existuje. Vhodná substituce zde je $t = \operatorname{tg} x$. Funkce tangens však není definována na celém intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$. Proto náš integrál roztrhneme na několik integrálů:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f = \int_{-2\pi}^{-\frac{3\pi}{2}} f + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f.$$

Funkce f je π -periodická, tedy podle Příkladů 9.8 a 9.9 máme

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f \stackrel{\text{Př. 9.9B}}{=} \int_{-2\pi}^{-\frac{3\pi}{2}} f + 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f \stackrel{\text{Př. 9.9B}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f + 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f.$$

Hodnotu integrálu $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f$ vypočteme v Příkladu 10.3.

9.4 Věta o střední hodnotě

Věta 9.10 (o střední hodnotě):

Nechť f je spojitá na $\langle a, b \rangle$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \quad \dots \quad \text{střední hodnota funkce } f \text{ na intervalu } \langle a, b \rangle$$