KAPITOLA 8: Primitivní funkce

8.1 Úvod

Definice:

Funkce F je **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí

$$F'(x) = f(x).$$

Poznámky:

1) Obsahuje-li I některý z krajních bodů, rozumíme pod $F'(x)$ v krajním bodě příslušnou jednostrannou derivaci.
2) F je **spojitá** na I, protože má v každém bodě intervalu I vlastní derivaci.

Věta 8.1:

a) Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, potom pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $F + c$ také primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.

b) Jsou-li F a G primitivní funkce k funkci f na intervalu I, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$G = F + c \qquad \big(\text{tj.} \quad G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I\,\big).$$

Příklad 8.1: Je-li $f \equiv 0$ (tj. $f(x) = 0 \ \forall x$) a $M = (0,1) \cup (2,3)$, pak pro funkce $F(x) = 1$ pro každé $x \in M$ a $G(x) = 2$ pro $x \in (0,1)$, $G(x) = 7$ pro $x \in (2,3)$, platí $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in M$. Přitom pro žádné $c \in \mathbb{R}$ neplatí $G = F + c$. (Ve Větě 7.1, b) je tedy podstatné, že I je interval, a proto také požadujeme v definici, aby I byl interval.)

neurčitý integrál funkce f na intervalu I ... $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ $\Big($zkráceně též $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}x\Big)$ ...

... množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I

používáme zde tyto názvy: $\int$ ... integrační znak; $f(x)$ ... integrand; x ... integrační proměnná

(nebude-li hrozit nedorozumění, použijeme někdy pro neurčitý integrál jen stručné označení $\displaystyle\int f$)

Příklad 8.2: a) Je-li $0 \in (a,b)$, pak funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nemá primitivní funkci na (a,b).
b) Funkce $f(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$, má primitivní funkci na $\mathbb{R}$, přestože není na $\mathbb{R}$ spojitá - má nespojitost v nule. (Primitivní funkcí je funkce $F(x) = x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $F(0) = 0$ - viz Příklad 5.8.)

Věta 8.2:

Je-li funkce f spojitá na intervalu I, pak existuje k funkci f primitivní funkce na intervalu I.

Poznámka:

Lze ukázat, že pokud funkce f je derivací funkce F na intervalu I, pak f má Darbouxovu vlastnost (viz Důsledek 6.2). Tedy primitivní funkce existují jen k funkcím s Darbouxovou vlastností.

Tabulkové integrály

$f(x)$	$F(x)$ např.	I
$A \qquad (A \in \mathbb{R})$	Ax	$\mathbb{R}$
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ pro $\alpha \in \mathbb{N}_0$ $(-\infty,0),\ (0,\infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{Z};\ \alpha < -1$ $(0,\infty)$ pro $\alpha \notin \mathbb{Z}$ $^{\star)}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$(-\infty,0),\ (0,\infty)$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x \qquad (a>0,\ a\neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$\Big(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\Big);\ k \in \mathbb{Z}$
$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$\big(k\pi, (k+1)\pi\big);\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ $-\arccos x$	$(-1,1)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$ $-\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{cotgh} x$	$(-\infty,0),\ (0,\infty)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argsinh} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argcosh} x$ $-\operatorname{argcosh} (-x)$	$(1,\infty)$ $(-\infty,-1)$

$^{\star)}$ ... pro některé racionální exponenty lze brát též $I = (-\infty, 0)$

Veronika Sobotíková, FEL ČVUT Praha

8.2 Základní metody hledání primitivní funkce

Značení: Je-li $A,\ B \subset M,\ \ c \in M$, pak píšeme

$$\begin{aligned} A \pm B &= \{\, a \pm b \mid a \in A,\ b \in B \,\}, \\ c \pm A &= \{\, c \pm a \mid a \in A \,\}, \\ c \cdot A &= \{\, c \cdot a \mid a \in A \,\}. \end{aligned}$$

Věta 8.3 (o linearitě):

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I, G primitivní funkce ke funkci g na intervalu I a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

a) $F + G$ je primitivní funkcí k $f + g$ na I, tj. $\displaystyle\int (f+g)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x + \int g\,\mathrm{d}x$,

b) $\alpha \cdot F$ je primitivní funkcí k $\alpha \cdot f$ na I, tj. $\displaystyle\int \alpha \cdot f\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int f\,\mathrm{d}x$.

Integrace per partes

Věta 8.4 (integrace per partes):

Nechť F, G a H jsou postupně primitivní funkce k funkcím f, g a $f \cdot G$ na I. Pak $F \cdot G - H$ je na I primitivní funkcí k funkci $F \cdot g$, tj.

$$\int F \cdot g\,\mathrm{d}x = F \cdot G - \int f \cdot G\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka:

Pokud funkce u, v mají vlastní derivace na intervalu I a existuje primitivní funkce k funkci $u' \cdot v$ na intervalu I, pak lze *symbolicky* psát:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v.$$

Příklad 8.3: Nalezení $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(0,\infty)$. (Použijeme rovnost $\ln x = 1 \cdot \ln x$. Takovýto přepis integrandu se hodí i při hledání $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$ apod., kde je ovšem potřeba metodu per partes kombinovat s metodou substituce.)

Příklad 8.4: Najděte $\displaystyle I = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Na $(0,\infty)$ máme

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = \frac{1}{x} \\ u' = \frac{1}{x} & v = \ln x \end{array} \right| \overset{\text{PP}}{=} \ln^2 x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \ln^2 x - I.$$

Tím jsme dostali pro I rovnici $I = \ln^2 x - I$, odkud na $(0,\infty)$ je $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = I = \frac{\ln^2 x}{2} + c$. (Podobně se hledají např. $\displaystyle\int \cos ax \cdot \mathrm{e}^{bx}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \sin ax \cdot \mathrm{e}^{bx}\,\mathrm{d}x$ – v těchto případech se jen integrace per partes použije dvakrát.)

Příklad 8.5: Nalezení $\displaystyle I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$, pro $n = 1,\ 2$.

$\Big($Pro $n > 1$ lze odvodit rekurentní vzorec $\displaystyle I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left(\big(2(n-1)-1\big) I_{n-1} - \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \right).\Big)$

Metoda substituce

Věta 8.5 (o substituci):

a) Nechť I, J jsou otevřené intervaly, F je primitivní funkce k funkci f na J, $\varphi(I) \subset J$ a φ má vlastní derivaci na I (je tam tedy spojitá). Potom

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(\varphi(t)) + c \qquad \text{na } I.$$

b) Pokud je φ navíc prostá na I, $\varphi(I) = J$ a existuje primitivní funkce G k $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na I, pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi_{-1}(x)) + c \qquad \text{na } J.$$

(Tvrzení Věty 8.5 lze zapsat také takto: $\displaystyle\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int f(x)\,\mathrm{d}x; \qquad x = \varphi(t); \quad t \in I\,.$)

Poznámka:

Ve Větě 8.5 je z předpokladů části a) funkce φ spojitá, tedy v části b) lze nahradit předpoklad prostoty funkce φ předpokladem ryzí monotonie funkce φ.

Příklad 8.6: Nalezení $\displaystyle\int \cos(\ln u) \cdot \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ na $(0, \infty)$ pomocí substituce $x = \varphi(u) = \ln u$.

Příklad 8.7: Vyjádření a) $\displaystyle\int f(x + B)\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int f(Ax + B)\,\mathrm{d}x$ $(A,\, B \in \mathbb{R},\; A \neq 0)$ pomocí primitivní funkce F k funkci f.

Příklad 8.8: Nalezení $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 5}\,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$.

Příklad 8.9: Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: 1. možnost: Na $(-1, 1)$ máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \left|\begin{array}{rcl} x &=& \cos t \;\ldots\; t \in (0, \pi) \\ (\,\arccos x &=& t\,) \\ \mathrm{d}x &=& -\sin t\,\mathrm{d}t \end{array}\right| \;=\; \int \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 t}}\,(-\sin t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{-\sin t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = -\int 1\,\mathrm{d}t = -t + c = -\arccos x + c \qquad \text{na } (-1, 1).$$

(V substituci jsme využili toho, že funkce $\cos t$ je prostá na $(0, \pi)$ a na začátku druhého řádku úprav toho, že $\sin t > 0$ na $(0, \pi)$.)

2. možnost: Na $(-1, 1)$ máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \left|\begin{array}{rcl} x &=& \sin z \;\ldots\; z \in (-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\,) \\ (\,\arcsin x &=& z\,) \\ \mathrm{d}x &=& \cos z\,\mathrm{d}z \end{array}\right| \;=\; \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 z}}\,\cos z\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int \frac{\cos z}{\cos z}\,\mathrm{d}z = \int 1\,\mathrm{d}z = z + c = \arcsin x + c \qquad \text{na } (-1, 1).$$

(V substituci jsme využili toho, že funkce $\sin z$ je prostá na $(-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\,)$ a na začátku druhého řádku úprav toho, že $\cos z > 0$ na $(-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\,)$.)

Přestože v první a druhé možnosti vyšly na první pohled různé výsledky, jsou oba tyto výsledky správné. Funkce $-\arccos x$ a $\arcsin x$ se totiž liší jen o konstantu ($\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$).

Příklad 8.10: Nalezení $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{(f(x))^k}\,\mathrm{d}x$ na intervalu $I \subset D(f) \setminus \{\, x \,|\, f(x) = 0 \,\}$ $(k \in \mathbb{N})$.

8.3 Integrace racionální funkce

8.3.1 Racionální funkce

$P,\ Q$ ... polynomy s reálnými koeficienty, Q nenulový

$R = \dfrac{P}{Q}$ ... racionální funkce

Z věty o dělení polynomů (viz předmět LAA) existují polynomy Y a Z, $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$, takové, že

$$P(x) = Y(x) \cdot Q(x) + Z(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

tj.

$$R(x) = \frac{Y(x) \cdot Q(x) + Z(x)}{Q(x)} = \underbrace{Y(x)}_{\text{už umíme integrovat}} + \underbrace{\frac{Z(x)}{Q(x)}}_{\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q} .$$

(Pro $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ je Y nulový polynom a $Z = P$.)

Dále uvažujeme jen funkce **ryze lomené,** tj. racionální funkce typu

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } \operatorname{st} P < \operatorname{st} Q.$$

Nejjednodušší typy funkcí ryze lomených ... **jednoduché** (též **parciální**) zlomky:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}, \qquad A \in \mathbb{R};\ \ \alpha \in \mathbb{R};\ \ k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l}, \qquad B,\ C \in \mathbb{R};\ \ p,\ q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0;\ \ l \in \mathbb{N}.$$

Věta 8.6:

1) Každou ryze lomenou funkci lze zapsat právě jedním způsobem jako součet jednoduchých zlomků.
2) Každou racionální funkci lze zapsat právě jedním způsobem jako součet polynomu a jednoduchých zlomků.

(Přesněji: „... právě jedním způsobem až na pořadí sčítanců ...“)

Jak hledat rozklad funkce ryze lomené na součet jednoduchých zlomků najdete ve skriptech [JT-DIP], str. 112-114. Kde to lze, doporučiji použít *zakrývací pravidlo.* Základním vlastnostem polynomů a jejich kořenů je věnována 11. kapitola skript [PO-ÚAZL].

Jaké máme očekávat v rozkladu jednoduché zlomky? Obecně všech typů, kde jmenovatel je dělitelem polynomu Q (někde ovšem může vyjít nulový čitatel).

Příklad 8.11: Rozložte na součet polynomu a jednoduchých zlomků racionální funkci $R(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 14}{x^3 - 3x + 2}$ $\left[= \dfrac{3}{(x-1)^2} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{4}{x+2} \right]$.

Příklad 8.12: Rozložte na součet polynomu a jednoduchých zlomků funkci $R(x) = \dfrac{x^6 + 2x^4 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2}$ $\left[= x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x^2+x+1} \right]$.

Příklady: Určete tvar, v kterém je třeba hledat rozklad na jednoduché zlomky racionální funkce

a) $\dfrac{x^3 + 2x - 4}{(x^2+4)^2 (x-1)^3}$ $\left[\dfrac{Ax+B}{(x^2+4)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4} + \dfrac{E}{(x-1)^3} + \dfrac{F}{(x-1)^2} + \dfrac{G}{x-1} \right]$,

b) $\dfrac{x^4}{(x^2+4x+5)^2 (x^2+1)(x+4)^2}$ $\left[\dfrac{Ax+B}{(x^2+4x+5)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4x+5} + \dfrac{Ex+F}{x^2+1} + \dfrac{G}{(x+4)^2} + \dfrac{H}{x+4} \right]$.

8.3.2 Integrace racionální funkce

= integrace polynomu + integrace jednoduchých zlomků

Integrace jednoduchých zlomků

(1) TYP $\boxed{\dfrac{A}{(x-\alpha)^n}\,; \quad n \in \mathbb{N} \;\; (x \neq \alpha)}$

a) $\underline{n > 1}$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,\mathrm{d}x \;=\; A\int (x-\alpha)^{-n}\,\mathrm{d}x \;\overset{\text{(Př. 7.7a)}}{=}\; A\,\frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1} \;+\; c \;=$$

$$= \frac{-A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} \;+\; c \qquad\qquad \text{na } (-\infty,\alpha) \text{ a na } (\alpha,\infty)$$

b) $\underline{n = 1}$

$$\int \frac{A}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x \;=\; A\ln|x-\alpha| \;+\; c \qquad\qquad \text{na } (-\infty,\alpha) \text{ a na } (\alpha,\infty)$$

(2) TYP $\boxed{\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,; \quad n \in \mathbb{N},\; p^2-4q<0 \;\; (x \in \mathbb{R})}$ (jmenovatel nemá reálné kořeny)

přepíšeme

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} \;=\; \frac{\frac{B}{2}\cdot\overbrace{(2x+p)}^{(x^2+px+q)'}}{(x^2+px+q)^n} \;+\; \frac{C-\frac{Bp}{2}}{(x^2+px+q)^n} \;=$$

$$= \;\frac{B}{2}\underbrace{\frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}}_{\text{viz (2A)}} \;+\; \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\underbrace{\frac{1}{(x^2+px+q)^n}}_{\text{viz (2B)}}$$

(K prvnímu kroku rozkladu: koeficient $\frac{B}{2}$ v prvním zlomku rozkladu jsme vybrali tak, aby v čitateli tohoto zlomku byla obsažena všechna x z čitatele zadané racionální funkce, koeficient $C-\frac{Bp}{2}$ v čitateli druhého zlomku rozkladu odpovídá tomu, že po sečtení čitatelů obou zlomků rozkladu musíme dostat původní čitatel. Neučte se tyto koeficienty jako vzorečky – podstatné tu je znát princip rozkladu na součet dvou zlomků.)

(2A)

$$\int \frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x \;=\; \left|\begin{array}{rcl} x^2+px+q & = & t \\ (2x+p)\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array}\right| \;=\; \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} \;=\; (\star)$$

pro $\underline{n > 1}$ (viz (1a)):

$$(\star) \;=\; -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{t^{n-1}} \;+\; c \;=\; -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} \;+\; c \qquad\qquad \text{na } \mathbb{R}$$

pro $\underline{n = 1}$ (viz (1b)):

$$(\star) \;=\; \ln|t| \;+\; c \;=\; \ln(\underbrace{x^2+px+q}_{>0\;\;\mathbf{!}}) \;+\; c \qquad\qquad \text{na } \mathbb{R}$$

(2B)

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}\,\mathrm{d}x \;=$$

$$= \int \frac{1}{\underbrace{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^n}_{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^{n-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}} \cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2+1\right)^n}\,\mathrm{d}x \;=\; \left| \begin{array}{rcl} \dfrac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} & = & t \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \left(q-\frac{p^2}{4}\right)^{-(n-\frac{1}{2})} \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t \;=\; (\star\star)$$

pro $\underline{n=1}$:

$$(\star\star) \;=\; \left(q-\frac{p^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} t \;+\; c \;=\; \left(q-\frac{p^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) \;+\; c \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

pro $\underline{n>1}$ se použije Příklad 8.5 (primitivní funkci dostaneme opět na celém $\mathbb{R}$)

Příklad 8.13: Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x^6+2x^4+3x^2+x-1}{x^5-x^2}\,\mathrm{d}x.$

8.4 Některé důležité substituce

polynom $P(x,y)$ <u>dvou</u> proměnných $x,\ y$ ...

... součet konečného počtu funkcí typu $c_{m,n}\cdot x^m\cdot y^n$, kde $m,\ n\in\mathbb{N}_0,\ c_{m,n}\in\mathbb{R}$

racionální funkce $R(x,y)$ <u>dvou</u> proměnných $x,\ y$ ...

... podíl dvou polynomů dvou proměnných $x,\ y$; $R(x,y)=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $Q(x,y)\neq 0$

analogicky pro <u>tři a více</u> proměnných

(nebude-li řečeno jinak, budou v dalším písmena $R,\ \tilde{R}$ atd. označovat racionální funkce)

Poznámka:

Dále uvedené substituce lze někdy použít, i když R není racionální funkce (viz např. Příklad 7.16).

A) Substituce pro integrály typu $\boxed{\int R(\mathrm{e}^{ax})\,\mathrm{d}x}$

Použijeme substituci

$$\mathrm{e}^{ax} = t \qquad \big(\text{ prostá funkce na } \mathbb{R},\quad t \in (0,\infty)\ \big).$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ pak můžeme psát

$$\int R(\mathrm{e}^{ax})\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{ax} & = & t\ \dots\ t \in (0,\infty) \\ x & = & \dfrac{1}{a}\ln t \\ \mathrm{d}x & = & \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \underbrace{R(t)\cdot\frac{1}{at}}_{\substack{\text{racionální}\\ \text{funkce}}}\,\mathrm{d}t$$

nebo pro $R(\mathrm{e}^{ax}) = \tilde{R}(\mathrm{e}^{ax})\cdot\mathrm{e}^{ax}$ také

$$\int \tilde{R}(\mathrm{e}^{ax})\cdot\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{ax} & = & t\ \dots\ t \in (0,\infty) \\ a\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int \tilde{R}(\mathrm{e}^{ax})\cdot a\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \tilde{R}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 8.14: **a)** Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{4x}-1}{\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}+1}$.

Řešení:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{4x}-1}{\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\mathrm{e}^{2x})^2-1}{(\mathrm{e}^{2x})^2+\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \begin{array}{c} x\in\mathbb{R};\quad t\in(0,\infty) \\ \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{2x} & = & t \\ x & = & \frac{1}{2}\ln t \quad - \text{ prostá} \\ \mathrm{d}x & = & \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| \end{array} =$$

$$= \int \frac{t^2-1}{t^2+t+1}\cdot\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t = \int \Big(-\frac{1}{2t} + \frac{\overbrace{2t+1}^{(t^2+t+1)'}}{2(t^2+t+1)} \Big)\,\mathrm{d}t \overset{1)}{=} \frac{1}{2}\big(-\ln t + \ln(t^2+t+1) \big) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\big(-\ln \mathrm{e}^{2x} + \ln(\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}+1) \big) + c = -x + \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}+1) + c$$

na $\mathbb{R}$

1) vynechali jsme u logaritmů absolutní hodnoty, protože argumenty jsou kladné

Příklad 8.14: **b)** Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-6x}-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{-4x}+1}$.

Řešení:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{-6x}-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{-4x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^2-1}{\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^2+1}\cdot\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \begin{array}{c} x\in\mathbb{R};\quad t\in(0,\infty) \\ \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{-2x} & = & t \\ -2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| \end{array} = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}t + \operatorname{arctg} t + c = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} + \operatorname{arctg}\left(\mathrm{e}^{-2x}\right) + c$$

na $\mathbb{R}$

B) Substituce pro integrály typu $\boxed{\int \frac{R(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x}$

Použijeme substituci

$$\ln x = t \qquad \big(\text{ prostá funkce na } (0,\infty),\quad t \in \mathbb{R}\ \big)$$

a pro $x \in (0,\infty)$ dostaneme

$$\int \frac{R(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \ln x & = & t\ \dots\ t \in \mathbb{R} \\ \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int R(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 8.15: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{5\ln x}{x(\ln^3 x + \ln^2 x - 2)}$.

Řešení: $x > 0,\ x \neq \mathrm{e}$ (máme totiž: $\ln^3 x + \ln^2 x - 2 = (\ln x - 1)(\ln^2 x + 2\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ x = \mathrm{e}$ – viz rozklad jmenovatele po substituci)

$$\int \frac{5\ln x}{x(\ln^3 x + \ln^2 x - 2)}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} t & = & \ln x \\ \mathrm{d}t & = & \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = \int \frac{5t}{\underbrace{t^3 + t^2 - 2}_{(t-1)(t^2+2t+2)}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-1} + \frac{-t+2}{t^2+2t+2}\right)\mathrm{d}t = \ln|t-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t + \int \frac{3}{\underbrace{t^2+2t+2}_{(t+1)^2+1}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2) + 3\operatorname{arctg}(t+1) + c =$$

$$= \ln|\ln x - 1| - \frac{1}{2}\ln(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + 3\operatorname{arctg}(\ln x + 1) + c$$

na $(0, \mathrm{e})$ a na (e, ∞)

Příklad 8.16: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$.

Řešení: Toto je případ, kdy R není racionální funkce, přesto lze postupovat podobně jako v předcházejícím příkladu. $\Big($Funkce f je zde definována pro ta x, pro která platí $\ln x \in (-1, 1)$, tj. pro $x \in \left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right)$.$\Big)$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \ln x & = & t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin t + c = \arcsin(\ln x) + c$$

na $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right)$

C) Substituce pro integrály typu $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x}$

(více k výběru vhodné substituce najdete v dodatku na konci kapitoly)

a) Typ $\boxed{\int \tilde{R}(\sin^2 x, \cos x)\cdot \sin x\,\mathrm{d}x}$

Všimneme si toho, že sinus, kterým tu násobíme, je až na znaménko derivací kosinu a druhou mocninu sinu lze snadno vyjádřit pomocí kosinu. Použijeme proto substituci

$$\cos x = t \qquad (\, t \in \langle -1, 1\rangle,\ \ \sin^2 x = 1 - t^2\,)$$

a pro $x \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$\int \tilde{R}(\sin^2 x, \cos x)\cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \cos x & = & t\ \ldots\ t \in \langle -1, 1\rangle \\ -\sin x\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ (\sin^2 x & = & 1 - t^2) \end{array}\right| = -\int \underbrace{\tilde{R}(1-t^2, t)}_{\text{racionální funkce proměnné } t}\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 8.17: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{2\sin x}{\sin^2 x + 1}$.

Řešení:

$$\int \frac{2\sin x}{\sin^2 x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\sin x}{2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} t & = & \cos x \in \langle -1, 1\rangle \\ \mathrm{d}t & = & -\sin x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{-\,\mathrm{d}t}{2-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\ln \underbrace{|t-\sqrt{2}|}_{\sqrt{2}-t} - \ln \underbrace{|t+\sqrt{2}|}_{\sqrt{2}+t} \Big) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x} + c$$

na $\mathbb{R}$

b) Typ $\boxed{\int \tilde{R}(\sin x,\, \cos^2 x) \cdot \cos x\,\mathrm{d}x}$

Všimneme si toho, že kosinus, kterým tu násobíme, je derivací sinu a druhou mocninu kosinu lze snadno vyjádřit pomocí sinu. Použijeme proto substituci

$$\sin x = t \qquad (\, t \in \langle -1,\, 1\rangle, \quad \cos^2 x = 1 - t^2 \,)$$

a pro $x \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$\int \tilde{R}(\sin x,\, \cos^2 x) \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \sin x & = & t \;\ldots\; t \in \langle -1,\, 1\rangle \\ \cos x\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ (\cos^2 x & = & 1-t^2) \end{array} \right| = \int \underbrace{\tilde{R}(t, 1-t^2)}_{\substack{\text{racionální funkce} \\ \text{proměnné } t}} \,\mathrm{d}t.$$

Příklad 8.18: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

Řešení: Musí platit $\cos x \neq 0$, tj. $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} t & = & \sin x \in (-1, 1) \\ \mathrm{d}t & = & \cos x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \ln \underbrace{|t+1|}_{t+1} - \ln \underbrace{|t-1|}_{1-t} \Big) + c =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2t}{1-t^2} + \ln \frac{t+1}{1-t} \right) + c = \frac{1}{4}\left(\frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right) + c$$

na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$; $\quad k \in \mathbb{Z}$

c) Typ $\boxed{\int \tilde{R}\,(\sin^2 x,\, \cos^2 x,\, \sin x \cos x)\,\mathrm{d}x}$

Protože při označení $t = \operatorname{tg} x$ je

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}\,, \\
\sin^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}\,, \\
\sin x \cdot \cos x &= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = t \cdot \frac{1}{1+t^2}\,,
\end{aligned}$$

můžeme na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, použít substituci

$$\operatorname{tg} x = t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Příklad 8.19: **b)** Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x - \cos x}$.

(Příklad 8.19, a) je z prostorových důvodů až na další stránce. Přečtěte si ho ale jako první.)

Řešení Příkladu 8.19, b) : Máme $x \in (-\frac{3\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi)$; $k \in Z$. Protože však použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$, musíme nejdříve vyloučit $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, tedy budeme mít $x \in (-\frac{3\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi) = I_k$ nebo $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi) = J_k$:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}\,\mathrm{d}x =$$

$$x \in I_k,\ t \in (1,\infty) \quad \text{nebo} \quad x \in J_k,\ t \in (-\infty, 1)$$

$$= \left| \begin{array}{lll} \operatorname{tg} x & = & t \\ x & = & \begin{cases} \operatorname{arctg} t + k\pi - \pi & \text{pro } x \in I_k \\ \operatorname{arctg} t + k\pi & \text{pro } x \in J_k \end{cases} \quad - \text{ prostá} \\ \mathrm{d}x & = & \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\,\frac{t+1}{t^2+1} \right) \mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{t-1} - \frac{1}{4}\,\frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2+1} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\,\ln(t^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x - 1| - \frac{1}{4}\,\ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) - \frac{1}{2}x + \frac{k\pi}{2} + c =^{1)}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - \frac{1}{2}x + c =^{2)} \frac{1}{4}\ln(1 - \sin 2x) - \frac{1}{2}x + c$$

Funkce $F(x) = \frac{1}{4}\ln(1 - \sin 2x) - \frac{1}{2}x$ je spojitá na $(-\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$ a na I_k a J_k je její derivací funkce f, která je spojitá v $-\frac{\pi}{2} + k\pi$. Tedy z věty 4.5 je $F'(-\frac{\pi}{2} + k\pi) = f(-\frac{\pi}{2} + k\pi)$ a F je primitivní funkcí k f na celém intervalu $(-\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$.

---

1) využíváme toho, že $\frac{k\pi}{2} + c$ může být jakákoliv reálná konstanta a zápis s „$+c$“ je jen symbolický

2) máme: $\dfrac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \dfrac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin^2 x + \cos^2 x} = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \sin 2x$

Příklad 8.19: **a)** Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$.

Řešení: Musí platit $\cos x \neq 0$, tj. $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) = I_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{tg}\, x & = & t \\ x & = & \mathrm{arctg}\, t + k\pi \quad - \text{ prostá} \\ \mathrm{d}x & = & \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int (1+t^2)\,\mathrm{d}t = t + \frac{t^3}{3} + c = \mathrm{tg}\, x + \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + c$$

na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$; $k \in Z$

d) $\boxed{\text{obecný případ}}$

Použijeme substituci

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t \qquad \Big(\text{prostá funkce na } \big((2k-1)\,\pi,\, (2k+1)\,\pi\big),\ k \in \mathbb{Z}\Big)$$

a dostaneme

$$\cos x = \cos^2 \tfrac{x}{2} - \sin^2 \tfrac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sin \tfrac{x}{2} \cos \tfrac{x}{2} = \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2\,t}{1+t^2}$$

Příklad 8.20: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos x + 3}$.

Řešení: Na intervalech $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) = I_k$ máme

$$\int \frac{\sqrt{2}}{\cos x + 3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} & = & t \quad - \text{ prostá na } I_k \\ x & = & 2\,\mathrm{arctg}\, t + 2k\pi \\ \mathrm{d}x & = & \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}} + c = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + c = G(x) + c.$$

Přestože byla integrovaná funkce definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$, je díky použité substituci funkce G primitivní funkcí k funkci f jen na intervalech $\big((2k-1)\,\pi,\, (2k+1)\,\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$. Primitivní funkci k f na celém $\mathbb{R}$ nemůžeme dostat dodefinováním funkce G v lichých násobcích π, protože v nich G nemá limity. Máme totiž

$$\left.\begin{array}{rrcl} & \lim_{x \to (2k+1)\,\pi^-} G(x) & = & +\frac{\pi}{2} \\ (\lim_{x \to (2k-1)\,\pi^+} G(x) =) & \lim_{x \to (2k+1)\,\pi^+} G(x) & = & -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{ skok}: -\pi.$$

Můžeme si ale pomoci tím, že na různých intervalech budeme ke G přičítat různé konstanty. Tím dostaneme funkci, která bude opět na každém z výše uvedených intervalů primitivní funkcí k funkci f a která navíc při vhodné volbě konstant bude mít v bodech $(2k+1)\,\pi$ limity. Těmito limitami ji pak dodefinujeme a dostaneme tak primitivní funkci k f na celém $\mathbb{R}$. (Primitivní funkci na $\mathbb{R}$ tedy dostaneme „slepením“ vhodných primitivních funkcí na jednotlivých podintervalech.)

Primitivní funkcí k funkci f na $\mathbb{R}$ je tedy například funkce

$$F(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\dfrac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + k\,\pi, & x \in \big((2k-1)\,\pi,\, (2k+1)\,\pi\big),\ k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} + k\,\pi, & x = (2k-1)\,\pi. \end{cases}$$

e) Typ $\boxed{\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, \mathrm{d}x}$

<u>m - liché nebo n - liché</u> ... použijeme substituce uvedené v **a)** a **b)**

<u>m - sudé a n - sudé</u> ... přejdeme k dvojnásobnému argumentu:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \sin^2 x &= \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \end{aligned}$$

(Tyto vztahy lze získat např. vyjádřením $\cos^2 x$ a $\sin^2 x$ z následujících rovností:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1, \\ (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x. \end{cases} \quad)$$

Příklad 8.21: Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \sin^4 x$.

Řešení:

$$\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + c =$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + c$$

na $\mathbb{R}$

D) <u>Substituce pro integrály typu</u> $\boxed{\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}, \quad ad \neq bc}$

Použijeme substituci

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\,.$$

Příklad 8.22: **a)** Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$.

Řešení: $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1} \neq 0 \Leftrightarrow x \in (1,\infty)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{x \in (1,\infty); \quad t \in (0,\infty)} \\ \sqrt[6]{x-1} &=& t \\ x &=& t^6+1 \ - \ \text{prostá na } (0,\infty) \\ \mathrm{d}x &=& 6t^5\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1})\,\mathrm{d}t = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + c =$$

$$= 2\sqrt{x-1} - 3\sqrt[3]{x-1} + 6\sqrt[6]{x-1} - 6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1) + c$$

na $(1,\infty)$

Příklad 8.22: **b)** Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$.

Řešení: Musí platit $(x-1)/(2-x) > 0$, tj. $x \in (1,2)$. Pro tato x máme

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} & = & t \ \in (0,\infty) \\ x & = & \frac{2t^2+1}{t^2+1} = 2 - \frac{1}{t^2+1} \ - \text{ prostá na } (0,\infty) \\ \mathrm{d}x & = & \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int t \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \overset{1)}{=} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{t^2+1} + c = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} - \sqrt{(x-1)(2-x)} + c$$

na $(1,2)$

[1)] použili jsme výpočet z Příkladu 8.5

E) Substituce pro integrály typu $\boxed{\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x \qquad a \neq 0,\ b^2 \neq 4ac}$

(jen stručně; jiné možné substituce viz skripta)

- doplněním na úplný čtverec a vhodnou lineární substitucí převedeme $\sqrt{ax^2+bx+c}$ na tvar

$d \cdot \sqrt{\pm y^2 \pm 1}$ (případ $\sqrt{-y^2-1}$ je nezajímavý – $y \in \emptyset$, tj. $x \in \emptyset$)

např.:

$$\sqrt{-x^2+4x+5} = \sqrt{-(x^2-4x-5)} = \sqrt{-((x-2)^2-9)} =$$

$$= \sqrt{9-(x-2)^2} = 3 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x-2}{3}\right)^2} = d \cdot \sqrt{1-y^2},$$

$$d = 3, \quad y = \frac{x-2}{3}$$

následné substituce:

a) pro $\underline{d \cdot \sqrt{y^2 + 1}}$ (odpovídá případu $a > 0,\ b^2-4ac < 0$)

$$y = \sinh t \qquad y \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{y^2+1} = \cosh t \qquad t \in \mathbb{R}$$

b) pro $\underline{d \cdot \sqrt{y^2 - 1}}$ (odpovídá případu $a > 0,\ b^2-4ac > 0$)

$$\begin{cases} y = \cosh t & y > 1 \\ y = -\cosh t & y < -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{y^2-1} = \sinh t \qquad t > 0$$

c) pro $\underline{d \cdot \sqrt{1 - y^2}}$ (odpovídá případu $a < 0,\ b^2-4ac > 0$)

$$\begin{array}{rcll} y & = & \cos t & y \in (-1,1) \\ \sqrt{1-y^2} & = & \sin t & t \in (0,\pi) \end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{array}{rcll} y & = & \sin t & y \in (-1,1) \\ \sqrt{1-y^2} & = & \cos t & t \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \end{array}$$

a)+b) dostaneme $R(\sinh t, \cosh t)$ a dále převedeme např. na $R(\mathrm{e}^{\alpha t})$

c) dostaneme $R(\sin t, \cos t)$

Poznámka: Při výběru z výše uvedených následných substitucí pomůže srovnání možných hodnot y s oborem hodnot funkcí $\sinh t$, $\pm\cosh t$, $\cos t$, $\sin t$.

Příklad 8.23: a) Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení: viz Příklad 8.9 u věty o substituci (je to typ c)).

Příklad 8.23: b) Najděte primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.

Řešení: Pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in (0, \infty)$ máme

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ccc} \frac{x}{2} & = & y \\ \frac{\mathrm{d}x}{2} & = & \mathrm{d}y \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}\,\mathrm{d}y =$$

$$\begin{array}{c} y \in (0,\infty),\ t \in (0,\infty) \quad \text{nebo} \quad y \in (-\infty,0),\ t \in (-\infty,0) \\ = \left| \begin{array}{ccl} y & = & \sinh t \ -\ \text{prostá} \\ \mathrm{d}y & = & \cosh t\,\mathrm{d}t \\ t & = & \operatorname{argsinh} y = \ln(y+\sqrt{y^2+1}) \end{array} \right| = \int \frac{2\cosh^2 t}{\sinh t}\,\mathrm{d}t = \end{array}$$

$$= \int \frac{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(\mathrm{e}^{2t}+1)^2}{(\mathrm{e}^{2t}-1)\,\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{e}^t & = & u \\ \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}u \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(u^2+1)^2}{(u^2-1)\,u^2}\,\mathrm{d}u = \int \left(1 + \frac{3u^2+1}{(u-1)(u+1)u^2}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{u^2} + \frac{2}{u-1} - \frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}u = u + \frac{1}{u} + 2\ln|u-1| - 2\ln|u+1| + c =$$

$$= \underbrace{\mathrm{e}^t \ + \ \mathrm{e}^{-t}}_{2\cosh t = 2\sqrt{y^2+1}} + 2\ln\left|\frac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t+1}\right| + c = 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} + 2\ln\left|\frac{\frac{x}{2}+\sqrt{(\frac{x}{2})^2+1}-1}{\frac{x}{2}+\sqrt{(\frac{x}{2})^2+1}+1}\right| + c =$$

$$= \sqrt{x^2+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right| + c$$

na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$

(v poslední úpravě jsme zlomek v argumentu logaritmu rozšířili nejdříve dvěma a pak výrazem $(x+2-\sqrt{x^2+4})$).

DODATEK: Výběr substituce pro integrály typu $\boxed{\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x}$

1. způsob

(1A) Zkusíme, zda funkce $R(u,v)$ nemá některou z dále uvedených vlastností:

a) $R(-u,v) = -R(u,v)$ (tj. R je lichá v první proměnné),

b) $R(u,-v) = -R(u,v)$ (tj. R je lichá v druhé proměnné),

c) $R(-u,-v) = R(u,v)$.

V těchto případech nás následující úvahy vedou k vhodným substitucím. Vybereme-li však na základě vlastností funkce $R(u,v)$ substituci $t = \operatorname{tg} x$, lze v praxi často funkci $R(\sin x, \cos x)$ připravit k použití této substituce jiným (někdy i výrazně jednodušším) způsobem (viz např. příklady 8.19 a), b)).

a) $R(-u,v) = -R(u,v)$ (tj. R je lichá v první proměnné)

V tomto případě se bude $\sin x$ (po eventuálním rozšíření zlomku výrazem $\sin x$) vyskytovat ve jmenovateli jen v sudých mocninách a čitatel bude možné zapsat jako součin funkce $\sin x$ a funkce, v níž se $\sin x$ vyskytuje opět jen v sudých mocninách. Sudé mocniny sinu tedy bude možné převést na mocniny kosinu a zbylý lichý sinus z čitatele použít na derivaci kosinu. Volíme tedy substituci:

$t = \cos x, \quad \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \qquad (\sin^2 x = 1 - t^2).$

b) $R(u,-v) = -R(u,v)$ (tj. R je lichá v druhé proměnné)

V tomto případě se bude $\cos x$ (po eventuálním rozšíření zlomku výrazem $\cos x$) vyskytovat ve jmenovateli jen v sudých mocninách a čitatel bude možné zapsat jako součin funkce $\cos x$ a funkce, v níž se $\cos x$ vyskytuje opět jen v sudých mocninách. Sudé mocniny kosinu tedy bude možné převést na mocniny sinu a zbylý lichý kosinus z čitatele použít na derivaci sinu. Volíme tedy substituci:

$t = \sin x, \quad \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \qquad (\cos^2 x = 1 - t^2).$

c) $R(-u,-v) = R(u,v)$

V tomto případě (po eventuálním rozšíření zlomku výrazem $\cos x$, $\cos^2 x$ nebo $\cos^3 x$) bude možné v jmenovateli vytknout $\cos^2 x$ a v čitateli a zbytku jmenovatele pak zbudou jen sudé mocniny sinů a kosinů, případně někdy vynásobeny součinem $\sin x \cdot \cos x$. Zde využijeme toho, že $\cos^2 x$ vytknutý ve jmenovateli lze použít na derivaci tangenty a že platí:

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\left(\text{nebo } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right),$$

$$\sin x \cdot \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Volíme tedy substituci:

$$t = \operatorname{tg} x, \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad \left(\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2}\right).$$

<u>Poznámka:</u> Jak se vypořádat s faktem, že definiční obor funkce $\operatorname{tg} x$ je někdy menší než definiční obor původní integrované funkce, najdete u příkladu 11.9 b).

<u>Poznámka:</u> Je-li $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, můžeme v praxi psát stejně jako v příkladu 8.19 b) $x = \operatorname{arctg} t + k\pi$ a $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Není tedy nutné upravovat funkci R tak, aby bylo možné ve jmenovateli vytknout $\cos^2 x$.

<u>Poznámka:</u> Někdy je zde vhodnější substituce $t = \operatorname{cotg} x$.

(1B) Pokud funkce R nemá ani jednu z vlastností popsaných v (1A) použijeme substituci $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Tato substituce převede integraci jakékoliv funkce $R(\sin x, \cos x)$ na integraci racionální funnkce. Její velkou nevýhodou je však to, že po ní dostáváme racionální funkce s vyšším stupněm polynomu ve jmenovateli než u jiných substitucí. Přitom integrace racionálních funkcí v vysokým stupněm polynomu ve jmenovateli je pracná, často i neproveditelná běžným způsobem, protože nemusíme umět najít rozklad jmenovatele. Proto volíme tuto substituci, jen když nemáme jinou možnost.

2. způsob

(2A) Zkusíme, zda neexistuje racionální funkce $\tilde{R}$ (dvou nebo tří proměnných) taková, že

a) $R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin^2 x, \cos x) \cdot \sin x$ nebo

b) $R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin x, \cos^2 x) \cdot \cos x$ nebo

c) $R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x)$.

Případ a) odpovídá variantě (1A) a), případ b) variantě (1A) b) a případ c) variantě (1A) c). Lze tedy v a) použít substituci $t = \cos x$, v b) $t = \sin x$ a v c) $t = \operatorname{tg} x$.

(2B) Pokud R nelze vyjádřit ani v jednom z tvarů uvedených v (2A), použijeme jako v (1B) substituci $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

Výhoda 1. způsobu:

Není-li na první pohled zřejmé, kterou substituci zvolit, je asi většinou výhodnější 1. způsob výběru substituce. Umožňuje nám totiž vybrat vhodnou substituci, aniž bychom předtím danou funkci upravovali. Po výběru substituce se už ovšem většinou úpravě integrované funkce nevyhneme. Není však vždy nutné upravovat na tvar, který potřebujeme pro výběr substituce 2. způsobem. Jako v příkladu 8.19 b) můžeme integrovanou funkci upravit funkci na tvar, který bude pro použití již známé substituce vhodnější. Další výhodou je to, že touto metodou můžeme případně snadno zjistit, že žádnou substituci z (1A) nelze použít.

Poznámka:

V některých případech lze použít všechny tři substituce z (1A). (Dá se dokonce celkem snadno ukázat, že pokud lze použít dvě z těchto substitucí, lze použít i třetí.) Záleží ovšem na konkrétním příkladu, která ze substitucí se nejsnáze provede a která nás dovede k nejjednodušší integraci racionální funkce.

Poznámka:

Při výběru substituce 1. způsobem není nutno pracovat s proměnnými u a v. Stačí zkusit, co se stane s hodnotou zlomku, jestliže změníme znaménko u všech sinů resp. kosinů resp. sinů a kosinů.

<u>Příklady na výběr substituce pro integrály typu</u> $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

1. $\displaystyle\int \frac{2\sin x}{\sin^2 x + 1}\,\mathrm{d}x$ (viz příklad 8.17)

   <u>Pro 1. způsob:</u> $R(u,v) = \dfrac{2u}{u^2+1}$,

   $R(-u,v) = \dfrac{-2u}{(-u)^2+1} = -R(u,v), \quad R(u,-v) = \dfrac{2u}{u^2+1} \neq -R(u,v)$,

   $R(-u,-v) = \dfrac{-2u}{(-u)^2+1} \neq R(u,v)$,

   z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \cos x$

   <u>Pro 2. způsob:</u> $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{2\sin x}{\sin^2 x + 1} = \dfrac{2}{\sin^2 x + 1} \cdot \sin x \quad \left(\text{tedy } \tilde{R}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \dfrac{2}{\tilde{u}+1}\right)$.

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$ (viz příklad 8.18)

   <u>Pro 1. způsob:</u> $R(u,v) = \dfrac{1}{v^3}$,

   $R(-u,v) = \dfrac{1}{v^3} \neq -R(u,v), \quad R(u,-v) = \dfrac{1}{(-v)^3} = -R(u,v)$,

   $R(-u,-v) = \dfrac{1}{(-v)^3} \neq R(u,v)$

   z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \sin x$

   <u>Pro 2. způsob:</u> $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\cos^3 x} = \dfrac{1}{\cos^4 x} \cdot \cos x \quad \left(\text{tedy } \tilde{R}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \dfrac{1}{\tilde{v}^2}\right)$.

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ (viz příklad 8.19 a))

Pro 1. způsob: $R(u,v) = \dfrac{1}{v^4}$,

$R(-u,v) = \dfrac{1}{v^4} \neq -R(u,v), \quad R(u,-v) = \dfrac{1}{(-v)^4} \neq -R(u,v),$

$R(-u,-v) = \dfrac{1}{(-v)^4} = R(u,v)$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \operatorname{tg} x$

Pro 2. způsob: $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\cos^4 x} = \dfrac{1}{(\cos^2 x)^2} \quad \left(\text{tedy } \tilde{R}(\tilde{u},\tilde{v}) = \dfrac{1}{\tilde{v}^2}\right).$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{(3\sin x - 2\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$

Pro 1. způsob: $R(u,v) = \dfrac{1}{(3u-2v)^2}$,

$R(-u,v) = \dfrac{1}{(3(-u)-2v)^2} \neq -R(u,v), \quad R(u,-v) = \dfrac{1}{(3u-2(-v))^2} \neq -R(u,v),$

$R(-u,-v) = \dfrac{1}{(3(-u)-2(-v))^2} = R(u,v),$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \operatorname{tg} x$

Pro 2. způsob: $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{9\sin^2 x - 12\sin x\cos x + 4\cos^2 x}$

$$\left(\text{tedy } \tilde{R}(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) = \frac{1}{9\tilde{u}^2 - 12\tilde{w} + 4\tilde{v}^2}\right).$$

5. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x$ (viz příklad 8.19 b))

Pro 1. způsob: $R(u,v) = \dfrac{v}{u-v}$,

$R(-u,v) = \dfrac{v}{-u-v} \neq -R(u,v), \quad R(u,-v) = \dfrac{-v}{u-(-v)} \neq -R(u,v),$

$R(-u,-v) = \dfrac{-v}{-u-(-v)} = R(u,v),$

z jednodušších substitucí lze tedy použít pouze substituci $t = \operatorname{tg} x$

Pro 2. způsob: $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x\cos x - \cos^2 x} \quad \left(\text{tedy } \tilde{R}(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) = \dfrac{\tilde{v}}{\tilde{w}-\tilde{v}}\right).$

6. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$

Pro 1. způsob: $R(u,v) = \dfrac{uv}{u+v}$,

$R(-u,v) = \dfrac{(-u)v}{-u+v} \neq -R(u,v), \quad R(u,-v) = \dfrac{u(-v)}{u+(-v)} \neq -R(u,v),$

$R(-u,-v) = \dfrac{(-u)(-v)}{-u+(-v)} \neq R(u,v),$

lze tedy použít pouze substituci $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

Pro 2. způsob: žádnou vhodnou funkci $\tilde{R}$ nenajdeme

Veronika Sobotíková, FEL ČVUT Praha