

## KAPITOLA 7: Průběh funkce

### 7.1 Extrémy a monotonie

#### Definice:

Řekneme, že funkce  $f$  nabývá **na množině**  $M \subset D(f)$  svého **globálního maxima** (**globálního minima**)  $A$  v bodě  $x_0$ , jestliže  $x_0 \in M$ ,  $f(x_0) = A$  a pro každé  $x \in M$  platí

$$f(x) \leq f(x_0) \quad ( f(x) \geq f(x_0) ). \quad (1)$$

(též: „absolutní maximum a minimum na  $M$ “, „největší a nejmenší hodnota na  $M$ “)

globální maximum }  
globální minimum } ... globální extrémy

#### Víme:

Spojité funkce na uzavřeném intervalu nabývá svých globálních extrémů (Věta 6.5).

#### Definice:

Řekneme, že funkce  $f$  nabývá **v bodě**  $x_0$  **lokálního maxima** (**lokálního minima**)  $f(x_0)$ , jestliže existuje okolí  $U(x_0)$  bodu  $x_0$  takové, že pro každé  $x \in U(x_0)$  platí

$$f(x) \leq f(x_0) \quad ( f(x) \geq f(x_0) ). \quad (2)$$

lokální maximum }  
lokální minimum } ... lokální extrémy

ostrá nerovnost v (??), (??) pro  $x \neq x_0$  ... **ostrý extrém**

#### Věta 7.1:

Jestliže funkce  $f$  nabývá lokálního extrému v bodě  $x_0$  a existuje  $f'(x_0)$ , pak  $f'(x_0) = 0$ .

#### Poznámka:

Z Věty 7.1 vyplývá, že funkce může mít lokální extrém jen v tom bodě, kde má nulovou derivaci nebo kde derivaci nemá.

$f'(x_0) = 0$  ...  $x_0$  - stacionární bod funkce (může v něm být extrém, ale nemusí)

#### Definice:

Řekneme, že funkce  $f$  je **rostoucí** (**klesající**) **v bodě**  $x_0 \in D(f)$ , jestliže existuje okolí  $U(x_0) \subset D(f)$  bodu  $x_0$  takové, že pro každé  $x \in U(x_0)$  platí

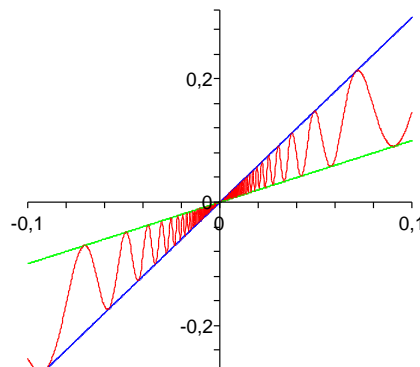
a) je-li  $x < x_0$ , pak  $f(x) < f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ),

b) je-li  $x > x_0$ , pak  $f(x) > f(x_0)$  ( $f(x) < f(x_0)$ ).

(analogicky funkce **neklesající** a **nerostoucí** v bodě)

**Poznámka:**

Funkce  $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} + 2x$  pro  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ , je rostoucí v nule, není ale rostoucí na žádném intervalu obsahujícím nulu. (Na obrázku jsou vyznačeny také grafy funkcí  $g(x) = x$  a  $h(x) = 3x$ , mezi jejichž grafy graf funkce  $f$  kmitá.)

**Věta 7.2:**

Je-li  $f'(x_0) > 0$  ( $f'(x_0) < 0$ ), pak je  $f$  v  $x_0$  rostoucí (klesající).

**Věta 7.3:**

Nechť  $f$  je spojitá na intervalu  $I$  a má v každém jeho vnitřním bodě derivaci. Pak

- $f$  je na  $I$  neklesající (nerostoucí) právě tehdy, když na vnitřku  $I$  je  $f' \geq 0$  ( $f' \leq 0$ ),
- je-li na vnitřku  $I$   $f' > 0$  ( $f' < 0$ ), pak  $f$  je na  $I$  rostoucí (klesající).

**Platí:**

- Funkce  $f$  je rostoucí na intervalu  $(a, b)$  právě tehdy, když je rostoucí v každém bodě tohoto intervalu.
  - Je-li  $f$  rostoucí na  $(a, b)$  a spojitá zprava v  $a$  (zleva v  $b$ ), pak je rostoucí na  $\langle a, b \rangle$  (na  $(a, b)$ ).
  - Je-li  $f$  rostoucí na  $(a, b)$  a na  $\langle b, c \rangle$ , pak je rostoucí na  $(a, c)$ .
- (Analogicky i pro ostatní typy monotonie.)

**Ověřování lokálních extrémů****A) Pomocí monotonie na okolí (a znaménka derivace):**

Je-li  $f$  spojitá v  $x_0$  a existuje-li  $\delta > 0$  tak, že

$f$ na $P_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$	$f$ na $P_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$	}	pak	v $x_0$
roste	klesá			je ostré lokální maximum
klesá	roste			je ostré lokální minimum
neklesá	neroste			je lokální maximum
neroste	neklesá			je lokální minimum
roste	roste			není extrém ( $f$ v $x_0$ roste)
klesá	klesá	není extrém ( $f$ v $x_0$ klesá)		

**Poznámka:** Monotonii většinou ověřujeme pomocí znaménka derivace.

**B) Pomocí 2. derivace:**

Je-li  $f'(x_0) = 0$  a  $f''(x_0) > 0$  ( $f''(x_0) < 0$ ), pak  $f$  má v  $x_0$  lokální minimum (lokální maximum).

## Hledání globálních extrémů spojité funkce

### A) na intervalu $I = \langle a, b \rangle$ :

a) Najdeme v  $I$  body, kde může být globální extrém (tj. „body podezřelé z extrému“):

- body  $a, b$
- stacionární body ( $f'(x) = 0$ )
- body, kde  $f$  nemá derivaci.

b) Spočítáme funkční hodnoty v bodech z a) a vybereme z nich největší / nejmenší.

### B) na intervalu, který není uzavřený (např. pro $(a, b)$ – jinak analogicky):

Postupujeme jako v A), pouze  $f(a)$  nahradíme  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha$  s tím, že je-li ve všech ostatních vyšetřovaných bodech funkční hodnota větší (menší) než  $\alpha$ , pak  $f$  na  $(a, b)$  globálního minima (maxima) nenabývá a

$$\alpha = \inf\{f(x) \mid x \in (a, b)\} \quad (\alpha = \sup\{f(x) \mid x \in (a, b)\}).$$

(Pokud  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  neexistuje, je situace složitější a nebudeme ji tu obecně řešit.)

## 7.2 Funkce konvexní a konkávní

### Definice:

Řekneme, že funkce  $f$  je **konvexní (ryze konvexní)** [**konkávní (ryze konkávní)**] na intervalu  $I$ , jestliže pro každé tři body  $t, x, z \in I$ ,  $t < x < z$ , a číslo

$$k_{t,z} = \frac{f(z) - f(t)}{z - t}$$

platí

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) && \left( f(x) < f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) \right) \\ \left[ f(x) &\geq f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) \right. && \left. \left( f(x) > f(t) + k_{t,z} \cdot (x - t) \right) \right]. \end{aligned}$$

### Platí:

Má-li funkce  $f$  derivaci na intervalu  $I$  a pro každé  $x_0, x \in I$ ,  $x \neq x_0$ , platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \left( f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right),$$

pak  $f$  je na  $I$  ryze konvexní (ryze konkávní). (Analogicky pro konvexní a konkávní funkce.)

### Definice:

Řekneme, že bod  $[x_0, f(x_0)]$  ( $x_0 \in D(f)$ ) je **inflexním bodem grafu** funkce  $f$ , jestliže  $f$  je spojitá v  $x_0$ , existuje  $f'(x_0)$  a existuje  $\delta > 0$  takové, že  $f$  je na jednom z intervalů  $(x_0 - \delta, x_0)$  a  $(x_0, x_0 + \delta)$  ryze konvexní a na druhém ryze konkávní. (Říkáme též, že  $f$  má v  $x_0$  **inflexi**.)

**inflexní tečna** ... tečna v inflexním bodě

### Věta 7.4:

Má-li funkce  $f$  druhou derivaci na  $(a, b)$ , pak

- a) je-li na  $(a, b)$   $f'' > 0$  ( $f'' \geq 0 \mid f'' < 0 \mid f'' \leq 0$ ), pak je  $f$  na  $(a, b)$  ryze konvexní (konvexní  $\mid$  ryze konkávní  $\mid$  konkávní),
- b) má-li  $f$  v  $x_0 \in (a, b)$  inflexi a existuje-li  $f''(x_0)$ , pak  $f''(x_0) = 0$ ,
- c) je-li  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f''(x_0) = 0$  a  $f''$  mění v  $x_0$  znaménko, pak  $f$  má v  $x_0$  inflexi.

## 7.3 Asymptoty grafu funkce

**Definice:**

- a) Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  **svislou asymptotu**, jestliže alespoň jedna jednostranná limita v  $x_0$  existuje a je nevlastní. Rovnice této asymptoty je  $x = x_0$ .
- b) Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0 = +\infty$  ( $-\infty$ ) **asymptotu**  $y = kx + q$ , ( $k, q \in \mathbb{R}$ ), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - (kx + q)) = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} k = 0 \quad \dots \quad \text{vodorovná} \\ k \neq 0 \quad \dots \quad \text{šikmá} \end{array} \right\} \text{ asymptota}$$

**Věta 7.5:**

- a) Přímka  $y = q$  je vodorovnou asymptotou funkce  $f$  v  $+\infty$  právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = q.$$

- b) Je-li  $k, q \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 0$ , pak přímka  $y = kx + q$  je šikmou asymptotou funkce  $f$  v  $+\infty$  právě tehdy, když

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q.$$

(Analogicky pro asymptoty v  $-\infty$ .)

## 7.4 Shrnutí

**Obecný postup při vyšetřování průběhu funkce  $f$ :**

Zjišťujeme

- 1)
  - $D(f)$ ,  $H(f)$ , průsečíky s osami, „znaménko“
  - je  $f$  sudá | lichá | periodická?
  - intervaly spojitosti, limity v bodech nespojitosti a v hraničních bodech  $D(f)$

(vycházíme z předpisu pro  $f(x)$ )

- 2)
  - intervaly monotonie
  - lokální a globální extrémy
  - chování tečen v blízkosti bodů nespojitosti

(vycházíme převážně z předpisu pro  $f'(x)$ )

- 3)
  - intervaly konvexity a konkávity, inflexní body

(většinou pomocí  $f''$ , někdy lze i z  $f'$ )

- tečny v inflexních bodech

- 4)
  - asymptoty

## 7.5 Příklady

**Příklad 7.2:** Najděte lokální extrémy funkce  $f(x) = x^3 - (x + 2|x|)$  a vyšetřete monotonii této funkce.

**Příklad 7.3:** Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce  $f$  z Příkladu 7.2 na intervalu a)  $\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$ , b)  $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ .

**Řešení:** Víme, že  $f'$  neexistuje v  $x_0 = 0$  a  $f$  má jeden stacionární bod  $x_1 = 1$  (viz řešení příkladu 7.2 na přednášce). Body  $x_0, x_1$  leží v obou intervalech. Pro hledání globálních extrémů přidáme k těmto bodům ještě krajní body intervalů. Dále budeme řešit varianty a) a b) každou zvlášť.

a) Porovnáváme hodnoty:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -2, \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{39}{8}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{8}.$$

Z nich je největší 0 a nejmenší  $-\frac{39}{8}$ , tedy

- $f$  nabývá na  $\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$  v  $x_0 = 0$  svého maxima  $f(0) = 0$ ,
- $f$  nabývá na  $\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$  v  $x_2 = -\frac{3}{2}$  svého minima  $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{39}{8}$ .

b) Porovnáváme hodnoty:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x) = -\frac{39}{8}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = -\frac{9}{8}.$$

Protože nejmenší z těchto hodnot je  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x)$  a bod  $-\frac{3}{2}$  v daném intervalu neleží, dostáváme, že

- $f$  nabývá na  $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  v  $x_0 = 0$  svého maxima  $f(0) = 0$ ,
- $f$  na  $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  svého minima nenabývá.

**Příklad 7.4:** Najděte (maximální) intervaly, na kterých je funkce  $f(x) = x \ln^2 x$  konvexní, konkávní; najděte inflexní body jejího grafu.

**Příklad 7.5:** Najděte asymptoty grafu funkce  $f(x) = x + |x| + \frac{\sin x}{x^2} + 3$ .

**Řešení:** Zřejmě  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dále:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{\sin x}{x^2} + 3\right) = +\infty,$$

tedy graf funkce  $f$  má svislou asymptotu v bodě  $x_0 = 0$ , její rovnice je  $x = 0$  (lze použít i  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , která je také nevlastní);

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x + \frac{\sin x}{x^2} + 3\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x^3} + \frac{3}{x}\right) = 2 (= k),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x}{x^2} + 3\right) = 3 (= q),$$

tedy graf funkce  $f$  má v  $+\infty$  šikmou asymptotu  $y = 2x + 3$ ;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sin x}{x^2} + 3\right) = 3,$$

tedy graf funkce  $f$  má v  $-\infty$  vodorovnou asymptotu  $y = 3$ .

**Příklad 7.6:** Graf funkce  $f(x) = x + \cos x$  nemá asymptoty v  $\pm\infty$ , protože sice

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$$

neexistuje.