KAPITOLA 5: Derivace funkce

5.1 Úvod

Motivační příklady: okamžitá rychlost, směrnice tečny

Definice:

Řekneme, že funkce f má **v bodě** x_0 **derivaci** (**derivaci zleva** | **derivaci zprava**) rovnu číslu a, jestliže existuje

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

$$\left(\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad \middle| \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \right).$$

Píšeme $f'(x_0) = a$ $\left(f'_-(x_0) = a \;\mid\; f'_+(x_0) = a \right)$.

Další značení: $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)$

$a \in \mathbb{R}$ ... vlastní derivace, $a = \pm\infty$ ... nevlastní derivace

f má derivaci na intervalu $\langle a, b)$ ... existuje $f'(x_0)$ pro každé $x_0 \in (a, b)$ a existuje $f'_+(a)$
(analogicky pro intervaly (a, b), $(a, b\rangle$, $\langle a, b\rangle$)

Poznámka:

$f'(x_0)$ existuje a je rovna a právě tehdy, když existují $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a obě jsou rovny a.

Poznámka:

Z Věty 4.11 o limitě složené funkce je $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Index 0 u x zde většinou vynecháváme a píšeme

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Poznámka:

Derivace jako funkce je definována tam, kde existuje **vlastní** derivace. Zřejmě vždy platí $D(f') \subset D(f)$.

Příklad 5.1: Určete derivace funkcí $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f(x) = \cos x$ a $f(x) = \sin(x)$ pomocí definice.

Řešení: Např. pro funkci $f(x) = \sin x$ máme

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} = \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1 \cdot \cos \frac{x_0 + x_0}{2} = \cos x_0$$

nebo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \sin x + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x =$$

$$= \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} \cdot \sin x + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x = -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{(\cos h + 1)} \cdot \sin x + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} -1 \cdot \frac{0}{2} \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Tečna a normála

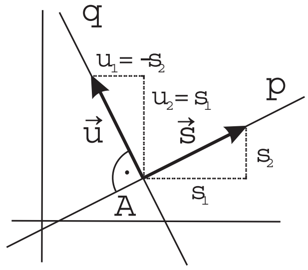
přímka v rovině:

$\vec{s} = (s_1, s_2)$ ... směrový vektor

$A = [a_1, a_2] \in p$

pro $\underline{s_1 \neq 0}$: $\quad p: \quad y = a_2 + \dfrac{s_2}{s_1}(x - a_1)$

$k_p = \dfrac{s_2}{s_1}$ ... směrnice přímky p



kolmá přímka

$q \perp p$ ... směrový vektor $\vec{u} = (u_1, u_2) = (-s_2, s_1)$

pro $\underline{s_2 \neq 0}$: $\quad k_q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{s_1}{-s_2} = -\dfrac{1}{k_p}$

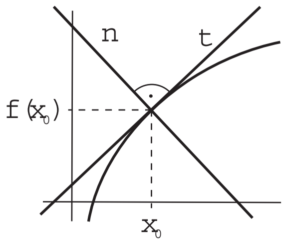
tečna t a **normála** n grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ (někdy: „v bodě x_0“) jsou kolmé přímky procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ takové, že

- pro $\underline{f'(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

  $\underline{t:}$ $\quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

  $\underline{n:}$ $\quad y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

  tj. $k_t = f'(x_0), \quad k_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$

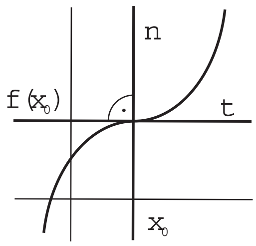


- pro $\underline{f'(x_0) = 0}$

  $\underline{t:}$ $\quad y = f(x_0)$

  $\underline{n:}$ $\quad x = x_0$

  tj. $\quad k_t = 0$

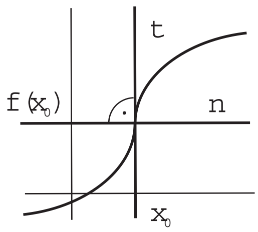


- pro $\underline{f'(x_0) = \pm\infty}$

  $\underline{t:}$ $\quad x = x_0$

  $\underline{n:}$ $\quad y = f(x_0)$

  tj. $\quad k_n = 0$



Příklad 5.2: Najděte tečnu a normálu grafu funkce $f(x) = x^2$ v bodě $[3, ?]$ (v bodě 3).

Řešení: Máme $x_0 = 3$, $f(3) = 9$ (tj. $A = [3, 9]$), $D(f) = \mathbb{R}$. Spočítáme $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x + 3) = 6$. Tedy $k_t = f'(3) = 6$, $k_n = -\dfrac{1}{f'(3)} = -\dfrac{1}{6}$. Rovnice tečny a normály odtud jsou $t: \ y = 9 + 6(x - 3)$ (neboli $t: \ 6x - y - 9 = 0$) a $n: \ y = 9 - \dfrac{1}{6}(x - 3)$ (neboli $n: \ x + 6y - 57 = 0$).

5.2 Věty o derivacích

Věta 5.1:

Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v x_0 spojitá.

Příklad 5.3: **a)** Funkce $f(x) = |x|$ je spojitá, $f'(0)$ ale neexistuje - tedy spojitost k existenci derivace nestačí.
b) Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ není spojitá v nule, přesto tam má derivaci, ale nevlastní - tedy existence nevlastní derivace spojitost nezaručuje.

Věta 5.2:

Nechť existují vlastní $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Potom

a) $\big(f \pm g\big)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

b) $\big(f \cdot g\big)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(speciálně pro $c \in \mathbb{R}$: $\big(c\, f\big)'(x_0) = c\, f'(x_0)$)

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, je-li $g(x_0) \neq 0$.

Příklad 5.4: $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Poznámka:

a) $\underline{(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'} = (f_1 + (f_2 + \ldots + f_n))' = f_1' + (f_2 + (f_3 + \ldots + f_n))' = \ldots = \underline{f_1' + f_2' + \ldots + f_n'}$

b) $\underline{(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)'} = (f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3))' = f_1' \cdot (f_2 \cdot f_3) + f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3)' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot (f_2' \cdot f_3 + f_2 \cdot f_3') =$
$= \underline{f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3'}$ (analogicky pro $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)'$)

Príklad 5.5: Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $(x^n)' = n\, x^{n-1}$.

Řešení: Dokážeme matematickou indukcí:

- pro $n = 1$ máme: $(x^1)' = x' = 1 = 1.x^0 = 1.x^{1-1}$.
- předpokládejme, že vztah platí pro n, ukážeme, že platí i pro $n + 1$:
$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (n\, x^{n-1}) = x^n + n\, x^n = (n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}$

Věta 5.3 (o derivaci složené funkce):

Nechť existují vlastní $f'(x_0)$ a $g'(f(x_0))$. Potom existuje vlastní derivace funkce $g \circ f$ v bodě x_0 a platí

$$\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Poznámka:

$\underline{(h \circ g \circ f)'(x_0)} = (h \circ (g \circ f))'(x_0) = h'((g \circ f)(x_0)) \cdot (g \circ f)'(x_0) = \underline{h'(g(f(x_0))) \cdot g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$

(analogicky pro funkci vzniklou složením více funkcí)

Věta 5.4 (o derivaci inverzní funkce):

Nechť f je prostá a spojitá na (a, b), $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0) = y_0$. Jestliže existuje vlastní $f'(x_0) \neq 0$, pak existuje také $f_{-1}'(y_0)$ a platí

$$f_{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \left(= \frac{1}{f'(f_{-1}(y_0))} \right).$$

Příklad 5.6: Derivace funkce: **a)** $\ln y$, **b)** $\arcsin y$, $y \in (-1, 1)$.

Příklad 5.7: Derivace funkce: **a)** $f(x) = a^x, \quad a > 0, \; x \in \mathbb{R}, \quad$ **b)** $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \; x > 0.$

Poznámka (logaritmické derivování):

Derivace funkcí typu $\;h(x) = \Big(u(x)\Big)^{v(x)}$, kde $\;u(x) > 0\;$ pro všechna $\;x \in D(h)$:

Máme $\;h(x) = \mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln(u(x))}$, tedy

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln(u(x))} \cdot \Big(v(x)\cdot\ln\big(u(x)\big)\Big)' = h(x)\cdot\Big(v(x)\cdot\ln\big(u(x)\big)\Big)' \\ &= h(x)\cdot\Big(v'(x)\cdot\ln\big(u(x)\big) + v(x)\cdot\big(\ln\big(u(x)\big)\big)'\Big) = \\ &= h(x)\cdot\Big(v'(x)\cdot\ln\big(u(x)\big) + v(x)\cdot\tfrac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\Big) = \\ &= \underline{h(x)\cdot\Big(v'(x)\cdot\ln\big(u(x)\big) + v(x)\cdot\tfrac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\Big)}. \end{aligned}$$

Věta 5.5:

Nechť $\;f\;$ je <u>spojitá</u> na nějakém intervalu $\;\langle x_0, x_0+\delta)\;$ a existuje $\;\lim\limits_{x\to x_0+} f'(x) = a$. Potom existuje $\;f'_+(x_0)\;$ a platí $\;f'_+(x_0) = a$. $\quad$(Analogicky pro $\;f'_-(x_0)\;$ a $\;f'(x_0)$.)

Příklad 5.6, b*): Určení $\;f'_+(-1)\;$ pro $\;f(x) = \arcsin x\;$ pomocí Věty 5.5.

Příklad 5.8: Pro funkci $\;f(x) = x^2\cdot\cos\dfrac{1}{x}$, $\;x \neq 0$, $\;f(0) = 0$, která je spojitá na $\mathbb{R}$, neexistuje $\;\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$, existuje ale $\;f'(0) = 0\;$ - tvrzení Věty 5.5 tedy nelze obrátit.

5.3 Derivace vyšších řádů

n-tá derivace (derivace řádu n) funkce $f \quad \ldots \quad f^{(n)} \quad \ldots \quad$ definujeme indukcí:

1) $\;n = 1:\quad f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$

2) $\;n > 1:\quad$ předpokládejme, že existuje vlastní $f^{(n-1)}$ na nějakém okolí $U(x_0)$ a funkce $f^{(n-1)}$ má v x_0 derivaci - pak pokládáme: $\quad f^{(n)}(x_0) = \big(f^{(n-1)}\big)'(x_0)$

pro $\;n = 0\;$ píšeme: $\;f^{(0)} = f$

Značení:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x_0) &= f'(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \\ f^{(2)}(x_0) &= f''(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) \\ &\vdots \\ f^{(6)}(x_0) &= f^{VI}(x_0) &&= \frac{\mathrm{d}^6 f}{\mathrm{d}x^6}(x_0) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) & &&= \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0) \end{aligned}$$

Příklad 5.9: Pro $\;f(x) = \ln x, \quad x > 0$, máme

$$f'(x) = 1/x = x^{-1}, \quad f''(x) = (-1)\,x^{-2}, \quad f'''(x) = (-1)(-2)\,x^{-3}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\;x^{-n}.$$

Věta 5.6 (Leibnizův vzorec):

Nechť existují <u>vlastní</u> $\;n-$té derivace $\;f^{(n)}\;$ a $\;g^{(n)}\;$ funkcí $\;f,\;g\;$ v bodě $\;x_0 \in \mathbb{R}$. Potom

$$(f\cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\cdot g^{(n-k)}(x_0).$$

Příklad 5.10: Najděte pomocí Věty 5.6 $(x^2 \sin x)^{(9)}$.

Řešení: Snadno ověříme, že pro derivace funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sin x$ platí: $f^{(0)}(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $f^{(k)}(x) = 0$ pro $k \geq 3$ a $g^{(4l)}(x) = \sin x$, $g^{(4l+1)}(x) = \cos x$, $g^{(4l+2)}(x) = -\sin x$, $g^{(4l+3)}(x) = -\cos x$ $(l \in \mathbb{N}_0)$. Tedy podle Leibnizova vzorce (V5.6) máme:

$$\underline{(x^2 \sin x)^{(9)}} = \binom{9}{0} \cdot x^2 \cdot \underbrace{\cos x}_{(\sin x)^{(9)}} + \binom{9}{1} \cdot 2x \cdot \underbrace{\sin x}_{(\sin x)^{(8)}} + \binom{9}{2} \cdot 2 \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{(\sin x)^{(7)}} + \binom{9}{3} \cdot 0 \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{(\sin x)^{(6)}} + 0 + 0 + \ldots =$$

$$= x^2 \cos x + 9 \cdot 2\, x \sin x - \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 2 \cos x = \underline{x^2 \cos x + 18x \sin x - 72 \cos x}.$$

Přehled derivací elementárních funkcí:

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a\,, \quad a \in (0,\infty) \text{ pevné} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x \ln a}\,, \quad a \in (0,1) \cup (1,\infty) \text{ pevné} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}\,, \quad \alpha \text{ pevné} \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{pro } \alpha \in \mathbb{N}_0 \ ^{1} \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } \alpha \in \mathbb{Z}^- \\ x \in (0,\infty) & \text{pro } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \ ^{2} \end{cases}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1, 1)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1, 1)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Veronika Sobotíková, FEL ČVUT Praha

[1] pro $\alpha = x = 0$ pokládáme (ovšem pouze zde): $0 \cdot 0^{0-1} = 0$

[2] pro některé racionální exponenty lze rozšířit na $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$