KAPITOLA 3: Funkce - úvod

reálná funkce (jedné) reálné proměnné … $f : A \to \mathbb{R}$ …
… zobrazení množiny $A \subset \mathbb{R}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$

funkční hodnota … $y = f(x)$ (x – **argument**)

(tj. reálná funkce $f : A \to \mathbb{R}$ je „předpis“, který každému číslu x z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo $y = f(x)$)

definiční obor … $D(f)$ $(= A)$;

(není-li výslovně uveden, pak bereme za $D(f)$ největší množinu, na které má daný předpis smysl - tzv. *maximální definiční obor*)

obor hodnot … $H(f) = \{\, y \in \mathbb{R} \,|\, y = f(x) \text{ pro nějaké } x \in A \,\}$

$D(g) = A_1 \subset D(f) = A_2, \quad f(x) = g(x) \;\; \forall x \in D(g)$ … $\begin{cases} g & – \;\; \textbf{zúžení} \text{ funkce } f \; ((\text{z } A_2) \text{ na } A_1), \\ f & – \;\; \textbf{rozšíření} \text{ funkce } g \; ((\text{z } A_1) \text{ na } A_2) \end{cases}$

Příklady: 1) $D(f) = \mathbb{N}$ … **posloupnost**

2) $f(x) = a \; (\in \mathbb{R}),\; D(f) = \mathbb{R}$ … **konstantní** funkce

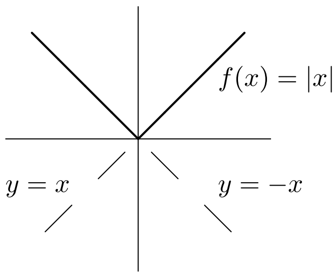
3) $f(x) = \sin x$ … $D(f) = \mathbb{R}$; $\quad g(x) = \sin x,\; x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ … $D(g) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

g – zúžení funkce f, $\quad f$ – rozšíření funkce g

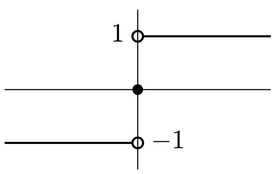
4) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$ … **signum** (znaménko)

graf funkce f … $\{\, (x, f(x)) \,|\, x \in D(f) \}$

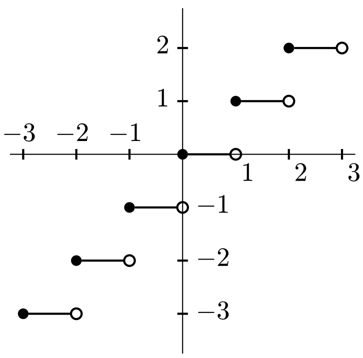
Příklady: 1) $f(x) = |x| \quad (x \geq 0 : \; f(x) = x; \quad x \leq 0 : \; f(x) = -x)$



2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$



3) $f(x) = [x]$



$f \leq g$ na M … $M \subset D(f) \cap D(g)$ a $f(x) \leq g(x) \;\; \forall x \in M$ (analogicky ostatní nerovnosti)

Veronika Sobotíková, FEL ČVUT Praha

Operace s funkcemi

	h	$h(x)$	$D(h)$
součet	$f+g$	$f(x)+g(x)$	$D(f)\cap D(g)$
rozdíl	$f-g$	$f(x)-g(x)$	$D(f)\cap D(g)$
součin	$f\cdot g$	$f(x)\cdot g(x)$	$D(f)\cap D(g)$
podíl	$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$(D(f)\cap D(g))\setminus\{x\mid g(x)=0\}$
násobek ($a\in\mathbb{R}$)	$a\cdot f$	$a\cdot f(x)$	$D(f)$

složená funkce ... $h = g\circ f$ ... $h(x) = g(f(x))$ (musí platit $H(f)\subset D(g)$)
f – vnitřní funkce, g – vnější funkce

vliv skládání na změnu grafu funkce ... viz skripta [JT-DIP] str. 28 (30), Věta 3.31

3.1 Vlastnosti funkcí

prostá funkce ... $f(x_1)\neq f(x_2)$ pro $x_1\neq x_2$ (tj. $f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2$)

inverzní funkce ... $f_{-1}(x)=y \quad\Leftrightarrow\quad f(y)=x$ ... $D(f_{-1})=H(f)$ (f musí být prostá)

Definice:

Řekneme, že funkce f je **omezená** (**zdola omezená** | **shora omezená**) na množině $A\subset D(f)$, jestliže existuje $S\in\mathbb{R}$ ($L\in\mathbb{R}$ | $K\in\mathbb{R}$) tak, že pro všechna $x\in A$ platí: $|f(x)|\le S$ ($L\le f(x)$ | $f(x)\le K$).

Funkce je omezená právě tehdy, když je omezená zdola i shora.

Poznámka:

Je-li $A=D(f)$, vynecháváme v názvu: „na množině A“. Podobně i u dalších pojmů.

Příklad 3.1: Funkce $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ je omezená (protože pro každé $x\in\mathbb{R}=D(f)$ platí např. $0\le\frac{1}{x^2+1}\le 1$ nebo také $|f(x)|\le 1$).

Definice:

Řekneme, že funkce f je na množině $A\subset D(f)$

- **neklesající** (**nerostoucí**), jestliže $f(x_1)\le f(x_2)$ $(f(x_1)\ge f(x_2))$ $\forall x_1,x_2\in A,\ x_1<x_2$,
- **rostoucí** (**klesající**), jestliže $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ $\forall x_1,x_2\in A,\ x_1<x_2$,
- **monotonní**, je-li na A neklesající nebo nerostoucí,
- **ryze monotonní**, je-li na A rostoucí nebo klesající.

klesající $\Leftrightarrow$ $(f(x_1)-f(x_2))\cdot(x_1-x_2)<0$ $\forall x_1,\ x_2\in A,\ x_1\neq x_2$
rostoucí $\Leftrightarrow$ $(f(x_1)-f(x_2))\cdot(x_1-x_2)>0$ $\forall x_1,\ x_2\in A,\ x_1\neq x_2$
(podobně pro nerostoucí a neklesající)

Každá funkce rostoucí na A je na A neklesající, každá funkce klesající na A je na A nerostoucí, a tedy každá funkce ryze monotonní na A je na A monotonní. Zřejmě žádná funkce není na jedné množině rostoucí a klesající zároveň, nerostoucí a zároveň neklesající jsou jen konstantní funkce.

Platí:

Je-li funkce f ryze monotonní na $D(f)$, pak je prostá a existuje f_{-1}. Funkce f_{-1} má stejný typ monotonie jako f.

Příklady: 1) $f(x) = [x]$ ... neklesající na $D(f) = \mathbb{R}$, rostoucí např. na $\mathbb{Z}$ nebo na $\{\frac{1}{2} + k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$; $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ... klesající na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$

(protože $(f(x) - f(y))\,(x - y) = (\frac{1}{x} - \frac{1}{y})(x - y) = \frac{y - x}{xy}\,(x - y) = \underbrace{-(x - y)^2}_{\leq 0}\,\frac{1}{xy}$ a $\frac{1}{xy} > 0$ pro $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y$),

není ale klesající na celém $D(f)$ (protože např. $-1 < 1$ a $f(-1) = -1 \not> 1 = f(1)$)

Poznámka:

Budeme-li dále mluvit o intervalech, nebudeme brát v úvahu intervaly jednobodové (tj. intervaly typu $\langle a, a\rangle$).

Definice:

Řekneme, že funkce f je **sudá** (**lichá**), jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí

a) $-x \in D(f)$,

b) $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

f - lichá, $0 \in D(f)$ $\Rightarrow$ $f(0) = 0$, f - sudá, $D(f) \neq \{0\}$ $\Rightarrow$ f není prostá,

„sudá $\cdot$ sudá = lichá $\cdot$ lichá = sudá“, „sudá $\cdot$ lichá =lichá $\cdot$ sudá = lichá“

Definice:

Řekneme, že funkce f je **periodická s periodou** $T > 0$, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí

a) $x \pm T \in D(f)$,

b) $f(x + T) = f(x)\ \big(= f(x - T)\big)$.

T je perioda, $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $k \cdot T$ je perioda

základní perioda ... nejmenší perioda (pokud existuje)

- nemají ji např.: **konstantní** funkce (periodou je každé kladné číslo),

Dirichletova funkce: $f(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ pro $x \notin \mathbb{Q}$ (periodou je každé kladné racionální číslo)

3.3 Elementární funkce

podrobně viz skripta [JT-DIP] strany 30 - 40 (32 - 42) (je potřeba znát dobře grafy !)

1. Mocnina. Funkce x^α, a^x, $\log_a x$

Mocniny s racionálními exponenty

- $n \in \mathbb{N}$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{n−krát}}$ — $a \in \mathbb{R}$
- $m \in \mathbb{N}$: sudé $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ $(= y \Leftrightarrow y^m = a$ a $y \geq 0)$ — $a \in \langle 0, \infty)$
  liché $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ $(= y \Leftrightarrow y^m = a)$ — $a \in \mathbb{R}$
- $m,\ n \in \mathbb{N}$, nesoudělná : $a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n$ — $a \in \langle 0, \infty)$ pro m sudé; $a \in \mathbb{R}$ pro m liché
- $q \in \mathbb{Q}^+$: $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$ — $a \neq 0$ a podmínky z a^q
- $a^0 = 1$ — $a \in \mathbb{R}$

Mocniny s reálnými exponenty

Pro $a > 0$ definujeme: $\quad a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}$, kde $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$ je taková posloupnost, že $\alpha_n \to \alpha$.

Lze ukázat, že taková posloupnost konvergující k α vždy existuje a že na jejím výběru uvedená limita nezávisí.
Dále zřejmě vždy dostaneme $a^\alpha > 0$.

(Pokud jste se ještě nesetkali s limitami, porozumíte této definici a komentáři, až probereme další kapitolu.)

Vlastnosti jsou stejné jako u racionálních exponentů $(a,\ b > 0, \quad r,\ s \in \mathbb{R})$:

- $(ab)^r = a^r b^r\,; \qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$
- $a^{r+s} = a^r a^s$
- $a^{rs} = (a^r)^s$
- $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

A) OBECNÁ MOCNINA

$f(x) = x^\alpha \qquad \ldots \qquad \alpha \in \mathbb{R}$ – pevné

pro α racionální: $D(f)$ a $H(f)$ závisí na α (viz [P17] dole), vždy $(0,\infty) \subset D(f)$, $(0,\infty) \subset H(f)$

pro α iracionální: $D(f) = (0,\infty)$, $\quad H(f) = (0,\infty)$

B) EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE (o základu a)

$f(x) = a^x \qquad \ldots \qquad a > 0$ – pevné

$D(f) = \mathbb{R}$, $\quad H(f) = (0,\infty)$ pro $a \neq 1$, $\quad H(f) = \{1\}$ pro $a = 1$

speciálně pro $a = \mathrm{e}$ (Eulerovo číslo) značíme $\mathrm{e}^x = \exp(x)$ … exponenciální funkce

($\mathrm{e} \doteq 2{,}718$, definuje se předpisem $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ - viz skripta [JT-DIP] příklad **2.36**)

C) LOGARITMICKÁ FUNKCE (o základu a)

(inverzní funkce k exponenciální funkci)

$\log_a x = y \iff a^y = x \qquad \ldots \qquad a > 0,\ a \neq 1$ – pevné $\qquad$ (pro $a = 1$ není funkce a^x prostá!)

$D(f) = (0,\infty)$, $\quad H(f) = \mathbb{R}$

speciálně pro $a = \mathrm{e}$ značíme $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$ … přirozený logaritmus

Vlastnosti logaritmů $(\,a,\ b > 0,\ a,\ b \neq 1; \quad x,\ y > 0; \quad r \in \mathbb{R})$:

- $\log_a \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$
- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^r = r \log_a x$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, $\quad$ speciálně: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Platí: $\quad a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ pro $a > 0,\ x \in \mathbb{R}$

(protože $\mathrm{e}^{x \ln a} = \mathrm{e}^{\ln a^x}$ a přirozený logaritmus je funkce inverzní k e^x)

Veronika Sobotíková, FEL ČVUT Praha

2. Goniometrické a cyklometrické funkce

A) GONIOMETRICKÉ FUNKCE

$\sin x \quad \dots \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \langle -1, 1 \rangle$

$\cos x \quad \dots \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \langle -1, 1 \rangle$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \dots \quad D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \quad \dots \quad D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$

Vybrané vlastnosti funkcí $\sin x$ **a** $\cos x$**:**

- $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}) \qquad \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \qquad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

Ze vzorce pro součet sinů máme

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}(\sin x + \sin y),$$

kde $A = \frac{x+y}{2}$, $B = \frac{x-y}{2}$, tj. $x = A + B,\ y = A - B$. Tedy

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A + B) + \sin(A - B)).$$

Podobně lze převést na součet nebo rozdíl i součin sinů a součin kosinů – dostaneme:

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A + B) + \cos(A - B)) \quad \text{a} \quad \sin A \cdot \sin B = -\frac{1}{2}(\cos(A + B) - \cos(A - B)).$$

(Tento přepis se hodí při integraci uvedených součinů).

Základní hodnoty goniometrických funkcí

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	-1	0	1	$\times$	-1
$\operatorname{cotg} x$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-1	$\times$	1	0	-1

B) CYKLOMETRICKÉ FUNKCE

(inverzní ke goniometrickým zúženým na vhodný interval)

f	$D(f)$	$H(f)$	f_{-1}	$D(f_{-1})$	$H(f_{-1})$
$\sin x$	$\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\arcsin x$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
$\cos x$	$\langle 0, \pi \rangle$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\arccos x$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle 0, \pi \rangle$
$\mathrm{tg}\, x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{arctg}\, x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$
$\mathrm{cotg}\, x$	$(0, \pi)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{arccotg}\, x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$

3. Hyperbolické a hyperbolometrické funkce

A) HYPERBOLICKÉ FUNKCE

f	$D(f)$	$H(f)$
$\sinh x \;=\; \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x \;=\; \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\langle 1, \infty)$
$\mathrm{tgh}\, x \;=\; \dfrac{\sinh x}{\cosh x} \;=\; \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$
$\mathrm{cotgh}\, x \;=\; \dfrac{\cosh x}{\sinh x} \;=\; \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$	$\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$	$(-\infty,\; -1) \cup (1\; \infty)$

Vybrané vlastnosti funkcí $\sinh x$ a $\cosh x$:

- $|\sinh x| \;<\; \cosh x$
- $\cosh^2 x \;-\; \sinh^2 x \;=\; 1$
- $\sinh 2x \;=\; 2 \sinh x \cosh x$

  $\cosh 2x \;=\; \cosh^2 x \;+\; \sinh^2 x$

B) HYPERBOLOMETRICKÉ FUNKCE

(inverzní k hyperbolickým, případně zúženým na vhodný interval)

f	$D(f)$	$H(f)$	f_{-1}	$D(f_{-1})$	$H(f_{-1})$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{argsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\langle 0, \infty)$	$\langle 1, \infty)$	$\operatorname{argcosh} x$	$\langle 1, \infty)$	$\langle 0, \infty)$
$\operatorname{tgh} x$	$\mathbb{R}$	$(-1,\ 1)$	$\operatorname{argtgh} x$	$(-1,\ 1)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{cotgh} x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(-\infty,\ -1) \cup (1,\ \infty)$	$\operatorname{argcotgh} x$	$(-\infty,\ -1) \cup (1,\ \infty)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Vyjádření hyperbolometrických funkcí pomocí logaritmů

- $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}\,), \qquad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}\,), \qquad x \in \langle 1, \infty)$
- $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad x \in (-1, 1)$ (viz Příklad 3.2)
- $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right), \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Příklad 3.2: Pro $|x| < 1$ vyjádřete $\operatorname{argtgh} x$ pomocí logaritmické funkce.

Řešení: Označíme $y = \operatorname{argtgh} x$. Pak

$$x = \operatorname{tgh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\,.$$

Po rozšíření zlomku výrazem e^y postupně dostáváme

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \\ (e^{2y}+1)x &= e^{2y}-1 \\ (x-1)\,e^{2y} &= -1-x \\ e^{2y} &= \frac{-1-x}{x-1} \\ e^{2y} &= \frac{1+x}{1-x} \\ 2y &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

Tedy

$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$