KAPITOLA 2: Posloupnosti

Definice :

Posloupností reálných čísel nazýváme zobrazení množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel. Hodnotu tohoto zobrazení v $n \in \mathbb{N}$ nazýváme **n-tým členem posloupnosti**.

Analogicky lze definovat i posloupnost komplexních čísel.

Značení: členy posloupnosti ... $a_n,\ b_n$ apod.
posloupnost ... $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \dots)$ (často také: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ apod.)

Obecněji: Množinu $\mathbb{N}$ nahradíme množinou $\mathbb{N}_0$ nebo $\{k,\, k+1,\, k+2,\, \dots\}$, $k \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{Z}$) apod.
(Totéž pak uděláme i v definicích a větách.)

Speciální případy posloupností

- **konstantní** posloupnost

  $a_n = A \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

  nerostoucí a neklesající, omezená

- **aritmetická** posloupnost

  $a_1 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ (d – **diference**)

  $a_{n+1} = a_n + d$ pro $n \in \mathbb{N}$, tj. $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ pro $n \in \mathbb{N}$

  (rekurentní zadání) (zadání vzorcem pro n-tý člen)

  Platí: $$a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{(2a_1 + (n-1)\cdot d)\cdot n}{2}$$ (důkaz např. indukcí)

- **geometrická** posloupnost

  $a_1 \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ (q – **kvocient**)

  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ pro $n \in \mathbb{N}$, tj. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$ (pokládáme tu $q^0 = 1$ pro každé $q \in \mathbb{R}$)

  p

  Platí: $$a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{pro } q \neq 1$$ (důkaz např. indukcí)

  $$a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n = n \cdot a_1 \quad \text{pro } q = 1$$ (zřejmé)

2.1. Omezené a monotonní posloupnosti

Definice :

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **omezená** (**shora omezená** | **zdola omezená**), jestliže je množina jejích členů omezená (shora omezená | zdola omezená), tj. jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$|a_n| \leq K \quad (\, a_n \leq K \mid K \leq a_n \,) \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 2.1: **a)** posloupnost $\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ je omezená: $\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

b) posloupnost $(2(n-3))_{n=1}^{\infty} = (-4, -2, 0, \dots)$ je omezená zdola, ale ne shora (tj. není omezená): $-4 \leq 2(n-3)\ \forall n \in \mathbb{N}$;

c) posloupnost $((-1)^{n+1}n)_{n=1}^{\infty} = (1, -2, 3, -4, \dots)$ není omezená zdola ani shora.

Poznámka :

Na omezenost či neomezenost posloupnosti nemá vliv změna konečně mnoha jejích členů.

Definice :

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **neklesající** (**nerostoucí**), jestliže

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} \leq a_n) \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost nazveme **monotonní**, je-li neklesající nebo nerostoucí.

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **rostoucí** (**klesající**), jestliže

$$a_{n+1} > a_n \quad (a_{n+1} < a_n) \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost nazveme **ryze monotonní**, je-li rostoucí nebo klesající.

Poznámka :

Každá rostoucí posloupnost je neklesající, každá klesající posloupnost je nerostoucí, a tedy každá ryze monotonní posloupnost je monotonní. Zřejmě žádná posloupnost není rostoucí a klesající zároveň. Nerostoucí a zároveň neklesající jsou jen konstantní posloupnosti.

Příklad 2.1*: **a)** posloupnost $\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right)_{n=1}^{\infty} = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right)$ není monotonní

b) posloupnost $(2(n-3))_{n=1}^{\infty} = (-4, -2, 0, \dots)$ je rostoucí $(a_{n+1} = a_n + 2)$

c) posloupnost $((-1)^{n+1} n)_{n=1}^{\infty} = (1, -2, 3, -4, \dots)$ není monotonní.

2.2. Limita posloupnosti

Definice :

Číslo $a \in \mathbb{R}$ je (**vlastní**) **limitou** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|\, a_n - a \,| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0.$$

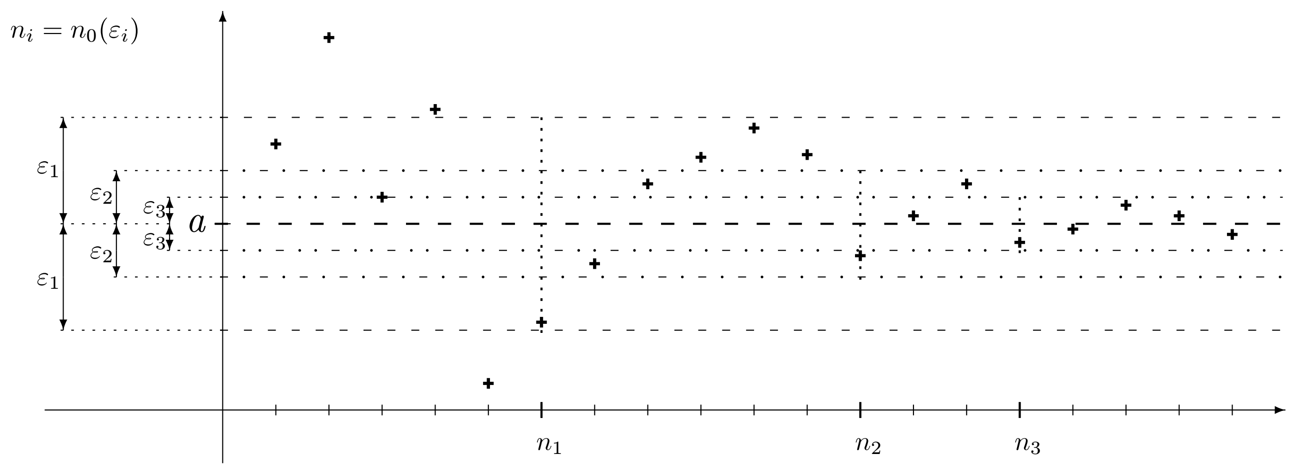
Má-li posloupnost vlastní limitu a, říkáme, že je **konvergentní** a že **konverguje k** a.

(Píšeme: $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, $\quad a_n \longrightarrow a$ pro $n \to \infty$, $\quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$).

Zápis pomocí kvantifikátorů:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \ (n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |\, a_n - a \,| < \varepsilon)$$

($\forall$ ... „pro všechna“, „pro každé“, $\exists$ ... „existuje (alespoň jedno)“)



Definice :

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má (**nevlastní**) **limitu** $+\infty$ $[-\infty]$, jestliže ke každému $K > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

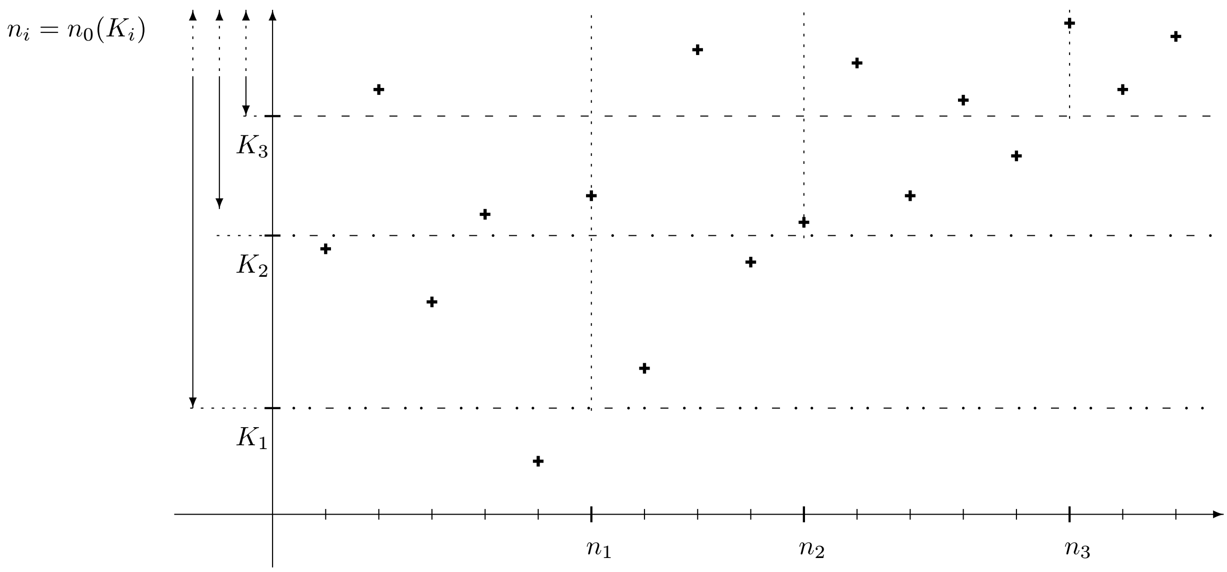
$$a_n > K \quad [\, a_n < -K \,] \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Má-li posloupnost limitu $+\infty$ $[-\infty]$, říkáme, že **diverguje k** $+\infty$ $[-\infty]$.

Zápis pomocí kvantifikátorů:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall K > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \ (n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall K > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \ (n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -K)$$



Společná charakterizace posloupností s vlastní nebo nevlastní limitou pomocí okolí:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $U(a)$ bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n \in U(a)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^* \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall U(a) \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \ (n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)).$$

Poznámka :

Změna konečně mnoha členů posloupnosti nemá vliv na existenci a hodnotu její limity.

Příklad 2.2: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Příklad 2.3: $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty$ pro $p \in \mathbb{N}$ (platí i pro $p \in \mathbb{R}^+$)

2.3. Vlastnosti limity posloupnosti

Věta 2.1 (o jednoznačnosti limity) :

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $b_n = a_{k_n}$ pro $n \in \mathbb{N}$, nazýváme **vybranou poslopností** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (**podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$). Píšeme $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.2:

Posloupnost má limitu a právě tehdy, když každá z ní vybraná posloupnost má limitu a.

Věta 2.3:

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, pak

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

kdykoliv je výraz na pravé straně definován.

Důsledek 2.4:

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje. Pak platí:

a) Jestliže existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, pak neexistují $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n)$.

b) Jestliže existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, pak neexistují $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

Příklad 2.4: $\lim_{n\to\infty} \big((-1)^n + 1\big)$ neexistuje

Příklad 2.5: **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n}{2n-1} = 2$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ pro $p \in \mathbb{N}$ (platí i pro $p \in \mathbb{R}^+$)

Důsledek 2.5:

Je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = 0$.

Věta 2.6:

Je-li $b_n > 0$ ($b_n < 0$) pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = -\infty$).

Věta 2.7 (o dvou policajtech; o sevření):

Jsou-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ takové posloupnosti, že

a) existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro všechna $n \geq n_1$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \in \mathbb{R}$,

pak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ (tj. limita existuje a je rovna a).

Věta 2.8:

1. a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

   b) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ (pokládáme $|\pm\infty| = \infty$).

2. a) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $a \leq b$. (tzv. **limitní přechod v nerovnosti**)

   b) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$) a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

3. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

4. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a $k \in \mathbb{N}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.

Věta 2.9:

Každá monotonní posloupnost má limitu.

Věta 2.10:

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 2.11 (o zachování znaménka):

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ $[\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 0]$, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n > 0$ $[\, a_n < 0\,]$ pro každé $n \geq n_1$.

Věta 2.12 (Bolzano-Weierstrass):

Z každé **omezené** posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Věta 2.13:

Z každé **neomezené** posloupnosti reálných čísel lze vybrat podposloupnost, která má nevlastní limitu.

Věta 2.14 (Bolzano-Cauchyova podmínka):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje právě tehdy, když platí

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n, m \in \mathbb{N}: \;\; (\, n, m \geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a_m| < \varepsilon\,).$$

(Použijeme-li tedy tuto podmínku, můžeme ukázat, že posloupnost má limitu, i když nevíme, jaká by hodnota limity měla být.)

Některé užitečné limity

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$

  $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ (Eulerovo číslo) viz skripta [JT-DIP] příklad 2.36
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{pro} \quad a > 1 \\ 1 & \text{pro} \quad a = 1 \\ 0 & \text{pro} \quad |a| < 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro} \quad a \leq -1 \end{cases}$ (viz **Příklad 2.6** na další stránce)
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \in \mathbb{R}, \;\; a > 1 \\ +\infty & \text{pro } k \in \mathbb{R}, \;\; a \in (\,0, 1\,) \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$

Příklad 2.6: Určete $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ pro $a \in \mathbb{R}$.

Řešení:

a) $\underline{a > 1}$

V tomto případě máme $a = 1 + h$, kde $h > 0$, tedy podle binomické věty

$$a^n = (1+h)^n = 1 + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} \cdot h + \binom{n}{2} \cdot h^2 + \ \ldots + h^n.$$

Vynecháme-li v součtu všechny sčítance kromě druhého (jde o kladná čísla), dostaneme

$$a^n > nh.$$

Protože $n \to +\infty$, $h \to h > 0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} nh = +\infty$, a tedy podle Věty 2.8, 2 b) platí

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

b) $\underline{a = 1}$

Tentokrát jde o konstantní posloupnost (posloupnost samých jedniček), tedy

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 1.$$

c) $\underline{0 < a < 1}$

V tomto případě je $\frac{1}{a} = A > 1$, tedy podle a) máme $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = +\infty$. Odtud už s využitím Důsledku 2.5 okamžitě dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{A^n} = 0.$$

d) $\underline{a = 0}$

Zde jde opět o konstantní posloupnost (tentokrát posloupnost samých nul), tedy

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

e) $\underline{-1 < a < 0}$

Nyní zřejmě máme $|a| \in (0,1)$, a tedy podle c) je $\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$. Pomocí Věty 2.8, 1 a) tak dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

f) $\underline{a \leq -1}$

V tomto případě máme

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a^{2n} = \begin{cases} 1 & \text{pro } a = -1, \\ \infty & \text{pro } a < -1, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = \begin{cases} -1 & \text{pro } a = -1, \\ -\infty & \text{pro } a < -1. \end{cases}$$

Protože jsme našli dvě posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ vybrané z posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$, které mají různé limity, dostáváme z Věty 2.2, že tentokrát

$$\lim_{n\to\infty} a^n \ \text{neexistuje}.$$

(Kdyby totiž limita celé posloupnosti existovala a byla rovna A, museli by mít limitu A i obě z ní vybrané posloupnosti.)

Shrnutí:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{pro} \quad a > 1 \\ 1 & \text{pro} \quad a = 1 \\ 0 & \text{pro} \quad |a| < 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro} \quad a \leq -1 \end{cases}$$

Příklad 2.7: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n-1} - 5(-3)^n}{3^n - 5^{n+2}} = -\dfrac{1}{125}$