KAPITOLA 13: Dodatky

13.1 Mohutnost množin

(jen velmi stručně)

$|A|$ – mohutnost množiny A

$|A| = |B|$ – existuje bijekce (tj. vzájemně jednoznačné zobrazení) množiny A na množinu B

$|A| < |B|$ – existuje prosté zobrazení množiny A do množiny B,
ale neexistuje zobrazení množiny A na množinu B

Platí:

• Pro každé dvě množiny A, B platí právě jeden ze vztahů

$$|A| = |B|, \quad |A| < |B|, \quad |A| > |B|.$$

• Je-li $B \subset A$, pak $|B| \leq |A|$ (zkratka za: $|B| < |A|$ nebo $|B| = |A|$).

A konečná – lze ji zapsat ve tvaru $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, kde $a_i \neq a_j$ pro $i \neq j$,
pro A konečnou, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, definujeme: $|A| \overset{\text{def.}}{=} n \ (= |\{1, \ldots, n\}|)$

Platí:

• A je konečná právě tehdy, když $|A| < |\mathbb{N}|$.

A spočetná – $|A| = |\mathbb{N}|$

A nejvýše spočetná – A je konečná nebo spočetná

A nespočetná – A není konečná ani spočetná, tj. $|A| > |\mathbb{N}|$ (! $\neq$ „není spočetná“ !)

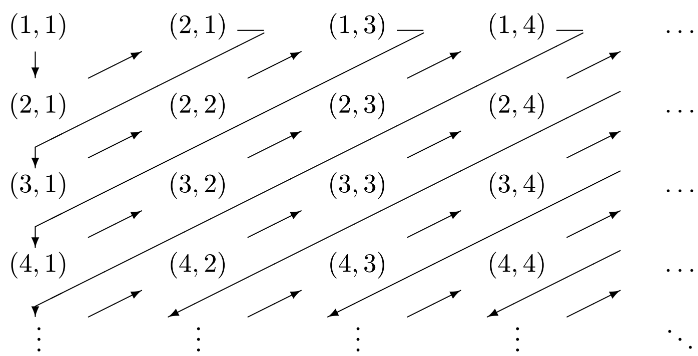
A spočetná $\Leftrightarrow$ existuje bijekce $f : \mathbb{N} \overset{\text{na}}{\to} A$, tedy lze psát $A = \{a_n | \ a_n = f(n) \text{ pro } n \in \mathbb{N}\}$, tj.

Platí:

• A je spočetná právě tehdy, když lze její prvky uspořádat do prosté nekonečné posloupnosti.

Příklad 13.1: Množina celých čísel je spočetná: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$

Příklad 13.2: Množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná: Jednа z možností, jak srovnat uspořádané dvojice přirozených čísel do posloupnosti, je zřejmá z následujícího obrázku:



Máme tedy např. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(1,1), \ (2,1), \ (1,2), \ (3,1), \ (2,2), \ (1,3), \ (4,1), \ (3,2), \ (2,3), \ (1,4), \ (5,1), \ (4,2), \ (3,3), \ \ldots \}$.
(Tabulkou dvojic přirozených čísel lze projít i jinými způsoby. Zkuste nějaké najít.)

Příklad 13.3: Množina racionálních čísel je spočetná: Nejdříve uspořádáme do posloupnosti kladná racionální čísla. To lze provést podobným způsobem jako v předchozím příkladu. Stačí místo uspořádaných dvojic psát zlomky (tj. např místo dvojice $(5,1)$ napsat $\frac{5}{1}$) a uvědomit si, že např. dvojice $(2,3)$ a $(4,6)$ (tj. zlomky $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{6}$) reprezentují totéž racionální číslo. Zlomek proto do posloupnosti zapíšeme jen tehdy, když v ní ještě není jiný zlomek stejné hodnoty. Dostaneme tak $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5}, \ldots\}$ [1]. Celou množinu racionálních čísel nyní uspořádáme do posloupnosti stejným způsobem, jaký jsme použili v Příkladu 13.1 pro množinu celých čísel. Dostaneme tak $\mathbb{Q} = \{0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots\}$.

Věta 13.1:

Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je nespočetná.

Důkaz: Ukážeme, že pro $M = \{\, x \in \langle 0,1) \mid \textit{ v dekadickém rozvoji čísla } x \text{ jsou pouze cifry 0 a 1} \}$ je $|M| > |\mathbb{N}|$. Pak platí také $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, protože $M \subset \mathbb{R}$ (a tedy $|\mathbb{R}| \geq |M|$ – viz výše).

Nespočetnost množiny M dokážeme **sporem**. Předpokládejme, že množina M je spočetná. Pak lze **všechny** její prvky uspořádat do prosté nekonečné posloupnosti, tj. $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$, kde

$$\begin{array}{l} \textbf{všechny} \\ \text{prvky } M \end{array} \left\{ \begin{array}{lcllllll} a_1 & = & 0, & \underline{\mathbf{a_{11}}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ \\ a_2 & = & 0, & a_{21} & \underline{\mathbf{a_{22}}} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\ \\ a_3 & = & 0, & a_{31} & a_{32} & \underline{\mathbf{a_{33}}} & a_{34} & \ldots \\ \\ a_4 & = & 0, & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \underline{\mathbf{a_{44}}} & \ldots \\ \\ \vdots & = & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \underline{\ddots} \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} a_{ij} \in \{0,1\} \\ \forall\, i,\ j \in \mathbb{N} \end{array}$$

Označme pro $i \in \mathbb{N}$

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } a_{ii} = 0 \\ 0, & \text{jestliže } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Pak pro číslo

$$b = 0,\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, \ldots$$

platí $b \in M$, ale přitom pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $b \neq a_i$, protože $b_i \neq a_{ii}$ (tj. b se od i-tého prvku posloupnosti liší minimálně na i-tém místě za desetinou čárkou). Tím jsme dostali **spor** s předpokladem, že posloupnost $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ obsahuje **všechny** prvky množiny M. Prvky množiny M tedy nelze uspořádat do posloupnosti. Tato množina proto není spočetná, čímž nemůže být spočetná ani množina $\mathbb{R}$.

Příklad 13.4: Množina iracionálních čísel je nespočetná: Už víme, že množina racionálních čísel je spočetná, tedy všechny její prvky lze uspořádat do prosté nekonečné posloupnosti. Pišme např. $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Kdyby byla spočetná i množina iracionálních čísel, tj. kdybychom mohli psát např. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$, dostali bychom, že platí $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots\}$. Jenže to by znamenalo, že je spočetná i množina reálných čísel. To ale podle Věty 13.1 není pravda. Proto množina iracionálních čísel být spočetná nemůže.

[1] Do uvedené části posloupnosti nejsou z tabulky zařazeny zlomky $\frac{2}{2} (= \frac{1}{1})$, $\frac{4}{2} (= \frac{2}{1})$, $\frac{3}{3} (= \frac{1}{1})$, $\frac{2}{4} (= \frac{1}{2})$.