KAPITOLA 11: Aplikace určitého integrálu

11.1 V rovině

Obsah plochy

Věta 11.1:

Nechť f a g jsou na $\langle a, b\rangle$ spojité a $f \leq g$. Pak obsah plochy ohraničené přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy funkcí f, g (tj. množiny $\{\, [x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x) \,\}$) je roven

$$S = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 11.1: Vypočtěte obsah plochy omezené elipsou s poloosami a, b.

Příklad 11.2: Vypočtěte obsah plochy omezené grafy funkcí $f(x) = 9 - x$ a $g(x) = \dfrac{8}{x}$.

Poznámka:

Vzorec z Věty 11.1 lze použít i v případě neuzavřených a/nebo neomezených intervalů (totéž platí i pro další vzorce).

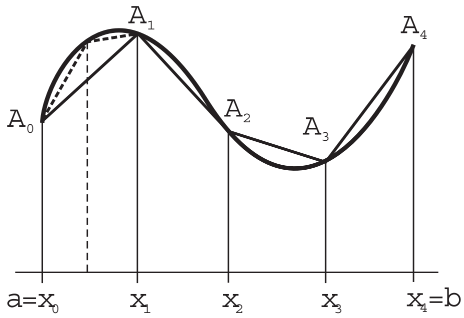
Příklad 11.3: Vypočtěte obsah plochy mezi osou x a grafem funkce $f(x) = \ln x$ na intervalu $(0, 1\rangle$.

Délka grafu

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, $\mathcal{D} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $A_i = [x_i, f(x_i)]$.

Pak označíme

$$s(f, \mathcal{D}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \underbrace{d\,(A_i, A_{i-1})}_{\text{vzdálenost bodů } A_i, A_{i-1}} \quad .$$



Je-li $\mathcal{D}'$ zjemnění dělení $\mathcal{D}$, pak z trojúhelníkové nerovnosti zřejmě platí

$$s(f, \mathcal{D}') \geq s(f, \mathcal{D}).$$

Délku grafu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ tedy můžeme definovat předpisem:

$$\ell \;=\; \sup_{\mathcal{D}}\ s(f, \mathcal{D}), \qquad \text{je – li suprémum konečné.}$$

Věta 11.2:

Nechť f má spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$. Pak délka grafu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je rovna

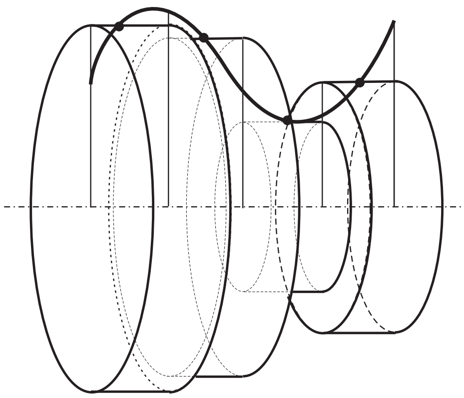
$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 11.4: Vypočtěte délku grafu funkce $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ na intervalu $\langle 12, 32\rangle$.

Příklad 11.5: Vypočtěte délku kruhového oblouku o poloměru R odpovídajícího středovému úhlu $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Veronika Sobotíková, FEL ČVUT Praha

11.2 V prostoru: Rotační tělesa a plochy



Objem válce o poloměru podstavy R a výšce v :

$$V = \pi R^2 v$$

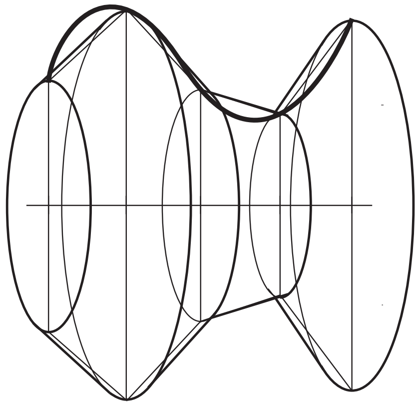
$$v \approx \mathrm{d}x, \quad R \approx f(x)$$

Obsah pláště komolého kužele s poloměry podstav R_1, R_2 a výškou v :

$$Q = \pi\sqrt{v^2 + (R_1 - R_2)^2}\,(R_1 + R_2) =$$

$$= 2\pi v \frac{(R_1 + R_2)}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{R_1 - R_2}{v}\right)^2}$$

$$v \approx \mathrm{d}x, \quad \frac{(R_1 + R_2)}{2} \approx f(x), \quad \frac{R_1 - R_2}{v} \approx f'(x)$$



Věta 11.3:

Nechť f je kladná spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$. Pak:

a) Objem tělesa, které vzniklo rotací kolem osy x plochy ohraničené přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ a grafem funkce f, je

$$V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x.$$

b) Obsah plochy vzniklé rotací grafu funkce f kolem osy x je

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 11.6: Vypočtěte objem koule o poloměru R.

Příklad 11.7: Vypočtěte objem elipsoidu vzniklého rotací elipsy s poloosami a, b kolem osy a) hlavní, b) vedlejší.

Příklad 11.8: Vypočtěte povrch koule o poloměru R.

Příklad 11.9: Vypočtěte objem anuloidu vzniklého rotací kruhu $\{\,[x, y]\,|\,x^2 + (y - 2R)^2 \le R^2\,\}$ kolem osy x.