KAPITOLA 10: Nevlastní integrál

singulární bod integrace funkce f na (a,b) :

- a, je-li $a=-\infty$; b, je-li $b=+\infty$
- $c \in \langle a,\, b\rangle$, je-li f neomezená na každém prstencovém okolí bodu c (pro $c=a$ nebo $c=b$ uvažujeme jen příslušná jednostranná okolí)

Definice:

- Nechť $-\infty < a < b \le +\infty$, b je singulární bod integrace funkce f na (a,b) a nechť pro každé $\beta \in (a,b)$ existuje $(R)\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ (*tedy* b *je jediný singulární bod integrace funkce* f *na* (a,b)). Potom definujeme **nevlastní integrál vzhledem k horní mezi** předpisem
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to b^-} (R)\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$
jestliže limita vpravo existuje.
- Nechť $-\infty \le a < b < +\infty$, a je singulární bod integrace funkce f na (a,b) a nechť pro každé $\alpha \in (a,b)$ existuje $(R)\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (*tedy* a *je jediný singulární bod integrace funkce* f *na* (a,b)). Potom definujeme **nevlastní integrál vzhledem k dolní mezi** předpisem
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to a^+} (R)\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
jestliže limita vpravo existuje.
- Jestliže daná limita existuje a je konečná, říkáme, že integrál **konverguje**, je-li rovna $+\infty$ $(-\infty)$, říkáme, že integrál **diverguje k** $+\infty$ $(-\infty)$.

Poznámka:

Je-li funkce f spojitá na $\langle a,\, b)$ resp. $(a,\, b\rangle$ a F je primitivní funkce k funkci f na (a,b), pak podle Věty 9.9 (Newton-Leibnitzova formule) můžeme psát

$$\underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \lim_{\beta\to b^-} [\,F(x)\,]_a^\beta = \lim_{\beta\to b^-} (\,\underbrace{F(\beta-)}_{F(\beta)} - F(a+)) =$$
$$= \lim_{\beta\to b^-} F(\beta) - F(a+) = F(b-) - F(a+) = \underline{[\,F(x)\,]_a^b}$$

resp.

$$\underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \lim_{\alpha\to a^+} [\,F(x)\,]_\alpha^b = \lim_{\alpha\to a^+} (F(b-) - \underbrace{F(\alpha+)}_{F(\alpha)}\,) =$$
$$= F(b) - \lim_{\alpha\to a^+} F(\alpha) = F(b-) - F(a+) = \underline{[\,F(x)\,]_a^b}\,.$$

integrál nevlastní vlivem meze ... $a=-\infty$ nebo $b=+\infty$
integrál nevlastní vlivem funkce ... f není omezená na (a,b)

přípustné dělení intervalu (a,b) ($-\infty \le a < b \le +\infty$) pro funkci f :

$\mathcal{D} = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$, kde $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ a pro $i = 1,\dots,n$ je $\displaystyle\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,\mathrm{d}x$ nevlastní (nejvýše) vzhledem k jedné mezi

Veronika Sobotíková, FEL ČVUT Praha

Definice:

- Nechť $\mathcal{D} = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ je přípustné dělení intervalu (a,b) pro funkci f. Pak definujeme
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
jestliže všechny integrály vpravo existují a je definován jejich součet (*tj. nejsou mezi nimi jak integrály divergující k* $+\infty$, *tak i integrály divergující k* $-\infty$).
- Jestliže součet existuje a je konečný, říkáme, že integrál **konverguje**, je-li součet roven $+\infty$ $(-\infty)$, říkáme, že integrál **diverguje k** $+\infty$ $(-\infty)$.
- Jestliže alespoň jeden z bodů $c_0, \dots, c_n$ je singulárním bodem integrace funkce f na (a,b), mluvíme o **nevlastním integrálu**, jinak o **integrálu vlastním**.

Poznámky:

a) Existence a hodnota $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nezávisí na volbě dělení $\mathcal{D}$.

b) Jestliže integrál existuje podle předchozí definice a je vlastní, existuje i jako Riemannův a je mu roven.

c) Pro $a > b$ opět pokládáme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Speciálně, jestliže je funkce f spojitá na intervalu (a,b) a má na tomto intervalu primitivní funkci F (singulárními body integrace funkce f na (a,b) jsou tedy nejvýše body a, b), pak pro každé $c \in (a,b)$ je $\mathcal{D} = \{a, c, b\}$ přípustné dělení intervalu (a,b) pro funkci f a platí
$$\underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\,F(x)\,\big]_a^c + \big[\,F(x)\,\big]_c^b =$$
$$= \Big(\underbrace{F(c-)}_{F(c)} - F(a+)\Big) + \Big(F(b-) - \underbrace{F(c+)}_{F(c)}\Big) = F(b-) - F(a+) = \underline{\big[\,F(x)\,\big]_a^b},$$
(Výraz vpravo je přitom zřejmě definován právě tehdy, když je definován součet $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, tj. když existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$).

Příklad 10.1: a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem (obou) mezí; konverguje ($=\pi$)

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem funkce; diverguje k $+\infty$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem funkce; neexistuje (protože tu není definován součet $\int_{-1}^0 + \int_0^1$)

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem meze; neexistuje (protože tu neexistuje limita primitivní funkce v $+\infty$)

e) $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ – integrál nevlastní vlivem funkce; neexistuje

(protože tu neexistuje limita primitivní funkce $\cos\frac{1}{x}$ v nule)

Příklad 10.2: Vypočtěte $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrál je nevlastní vlivem meze. Máme
$$\int_2^{\infty} \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_2^{\infty} \Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big)\,\mathrm{d}x = \big[\,\ln|x-1| - \ln|x+1|\,\big]_2^{\infty} =$$
$$= \Big[\,\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big|\,\Big]_2^{\infty} = 0 - \ln\frac{1}{3} = \ln 3.$$

Všimněte si na tomto příkladu, že pro nevlastní integrály nemusí platit rovnost $\int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g$, protože rozdíl vpravo nemusí být definován. (Zde např. máme $\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} = [\ln|x-1|]_2^{\infty} = +\infty = [\ln|x+1|]_2^{\infty} = \int_2^{\infty} \frac{1}{x+1}$.)

Veronika Sobotíková, FEL ČVUT Praha

Poznámka:

K výpočtu integrálů, které jsou nevlastní vzhledem k jedné mezi, můžeme používat metodu substituce. Při použití metody substituce se někdy může stát, že přejdeme od integrálu nevlastního k integrálu vlastnímu nebo naopak.

Příklad 10.3: Vypočtěte $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrál je vlastní, při použití metody substituce ale přejdeme k nevlastnímu integrálu. Máme totiž

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \operatorname{tg} x & = & t \\ x & = & \operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x & = & \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ -\frac{\pi}{2} & \rightsquigarrow & -\infty \\ \frac{\pi}{2} & \rightsquigarrow & +\infty \end{array}\right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\sqrt{2}\,t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,t\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Nyní už můžeme dopočítat Příklad 8.10. Z předchozího pro něj dostáváme

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right) = 2\sqrt{2}\pi.$$

Věta 10.1 (srovnávací kritérium):

a) Nechť $|f| \le g$ na (a,b), f je na (a,b) po částech spojitá a $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak konverguje také $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Nechť $f \le g$ $(g \le h)$ na (a,b), g je na (a,b) po částech spojitá a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ $\left(\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = -\infty\right)$. Pak $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ $\left(\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = -\infty\right)$.

Příklad 10.4: a) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$, b) $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$, c) pro $c \in \mathbb{R}$ konverguje $\displaystyle\int_c^{c+1} (x-c)^\alpha\,\mathrm{d}x$ právě tehdy, když $\alpha > -1$.

Příklad 10.5: $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < 0$.

(Výsledky Příkladů 9.4 a 9.5 často využíváme ve srovnávacím kritériu.)

Příklad 10.6: a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ konverguje, b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ diverguje k $+\infty$.

Příklad 10.7: a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ konverguje, b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ diverguje k $+\infty$, c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$ diverguje k $+\infty$.

Příklad 10.8: a) $\displaystyle\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$, b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = +\infty$, c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$ neexistuje,

d) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{|x-1|}\,\mathrm{d}x = +\infty$, e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, f) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{64}$

Příklad 10.9: a) $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{arccotg} x\,\mathrm{d}x = +\infty$, b) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\operatorname{arctg} x^2 - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi$.