KAPITOLA 1: Reálná čísla

1.1. Číselné množiny

Přirozená čísla ... $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

nula ... $0, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Celá čísla ... $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$

Racionální čísla ... $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$

Věta 1.1 :

Číslo $\sqrt{2}$ není racionální.

Důkaz: Provedeme **sporem** (tj. budeme předpokládat, že tvrzení neplatí, a ukážeme, že to vede ke sporu; nebude proto možné, aby tvrzení neplatilo).

Nechť tedy tvrzení neplatí, tj. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kde $p,\ q$ jsou **nesoudělná** celá čísla (v takovémto tvaru lze zřejmě zapsat každé racionální číslo). Pak ovšem $2 = (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$, tj. $2q^2 = p^2$. Tedy p^2 je sudé číslo, což ale znamená, že i p je sudé číslo. (Kdyby totiž p bylo liché, pak by pro vhodné celé číslo k platilo $p = 2k+1$. To by ale znamenalo, že p^2 je liché číslo, protože $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2)+1$. Jenže my víme, že p^2 je sudé. Proto p nemůže být liché a musí být sudé.) Protože p je sudé, existuje celé číslo l takové, že $p = 2l$. Z rovnosti $2q^2 = p^2$ pak ale dostáváme, že $2q^2 = (2l)^2 = 4l^2$, tj. $q^2 = 2l^2$. Jenže to znamená, že q^2 je sudé, a tedy i q je sudé. A to je ve sporu s předpokladem, že p a q jsou čísla nesoudělná. Proto číslo $\sqrt{2}$ nemůže být racionální. Tím jsme dokázali, že $\sqrt{2}$ je číslo iracionální.

Platí : Desetinný rozvoj každého racionálního čísla je periodický.

Příklad 1.1: $\dfrac{485}{7} = 69,\overline{285714}, \quad \dfrac{4896}{1110} = 4,4\overline{108}.$

Příklad 1.2: Vyjádřete číslo **a)** $a = 58,3\overline{785}$, **b)** $b = 0,\overline{9}$ jako podíl dvou celých čísel.

Řešení: a) Délka periody je 3, tedy číslo a vynásobíme číslem 10^3 a počítáme:

$$\begin{array}{rcrcr} 10^3 a & = & 1000\,a & = & 58378,5\overline{785} \\ & & -a & = & -58,3\overline{785} \\ \hline & & 999\,a & = & 58320,2 \end{array}$$

Tedy $a = \dfrac{58320,2}{999} = \dfrac{583202}{9990}$.

b) Jako v **a)** dostáváme

$$\begin{array}{rcrcr} 10^1 b & = & 10\,b & = & 9,\overline{9} \\ & & -b & = & -0,\overline{9} \\ \hline & & 9\,b & = & 9 \end{array}$$

Tedy $\mathbf{0,\overline{9}} = \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{9}} = \mathbf{1}$!

Reálná čísla ... $\mathbb{R}$ – lze je vyjádřit desetinným rozvojem (konečným nebo nekonečným); periodu 9 neuvažujeme (kvůli jednoznačnosti vyjádření - viz Př. 1.2 b))

Iracionální čísla ... $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1.2. Reálná čísla

Základní vlastnosti sčítání a násobení na množině reálných čísel

1) Pro každá $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

- $(a+b)+c = a+(b+c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ... **asociativita**
- $a+b = b+a$; $a \cdot b = b \cdot a$ ... **komutativita**
- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ ... **distributivita**

2)
- $a+b=b$ pro všechna $b \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $a=0$
- $a \cdot b = b$ pro všechna $b \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $a=1$

3)
- Ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje jediné $b \in \mathbb{R}$ takové, že $a+b=0$. ($b = (-1) \cdot a \stackrel{\text{def}}{=} -a$)
- Ke každému $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existuje jediné $c \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot c = 1$. ($c \stackrel{\text{def}}{=} a^{-1}$)

Další vlastnosti

($A \Rightarrow B$ ... „jestliže platí A, pak platí i B“)

- $a \leq b \Leftrightarrow a+c \leq b+c$
- $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ nebo $b=0$
- $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow a, b > 0$ nebo $a, b < 0$
- $a \cdot b < 0 \Leftrightarrow (a > 0$ a $b < 0)$ nebo $(a < 0$ a $b > 0)$
- $a \leq b, \; c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$
  $a \leq b, \; d \leq 0 \Rightarrow a \cdot d \geq b \cdot d$
- $a \leq b, \; c \leq d \Rightarrow a+c \leq b+d$
  $a \leq b, \; c \geq d \Rightarrow a-c \leq b-d$
- $0 \leq a \leq b, \; 0 \leq c \leq d \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot d$
- $0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$
- $0 < a \leq b, \; 0 < d \leq c \Rightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}$

absolutní hodnota čísla $a \in \mathbb{R}$

- $|a| = a$ pro $a \geq 0$
- $|a| = -a$ pro $a \leq 0$

Platí pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$:

!!! a) $|a+b| \leq |a|+|b|$ ... **trojúhelníková nerovnost**

b) $|c-a| \geq |c|-|a|$ (v **a)** stačí vzít $b = c-a$)

c) $|a| = |-a|$, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ pro $b \neq 0$

Intervaly

$(a, b \in \mathbb{R})$

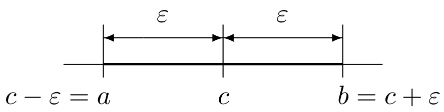
- $\langle a, b \rangle = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ ... **uzavřený** (také : $[a, b]$)
- $(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ ... **otevřený** (někdy také : $]a, b[$)
- $\left.\begin{array}{l} \langle a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} \\ (a, b \rangle = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} \end{array}\right\}$ ... **polouzavřené**

Poznámka: Někdy **stručně** označím: $I_{a,b}$ – interval s krajními body a, b (pro $a \leq b$ i $b \leq a$)

Platí pro $c,\ x,\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ \ \varepsilon > 0$:

- $|x-c| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad c-\varepsilon < x < c+\varepsilon \qquad (\text{tj. } \ x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)\ )$
- $|x-c| \le \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad c-\varepsilon \le x \le c+\varepsilon \qquad (\text{tj. } \ x \in \langle c-\varepsilon,\, c+\varepsilon\rangle\ )$

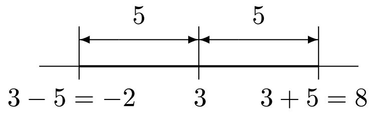
$c -$ střed intervalu
$\varepsilon -$ poloměr intervalu



$$c = \frac{a+b}{2} \qquad \varepsilon = \frac{b-a}{2}$$

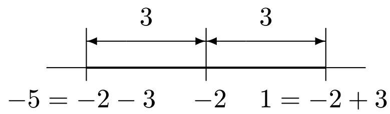
např.:

- $|x-3| < 5 \quad \dots \quad x \in (3-5, 3+5) = (-2, 8)$



- $x \in \langle -5,\, 1\rangle \quad \dots \quad c = \dfrac{-5+1}{2} = -2, \quad \varepsilon = \dfrac{1-(-5)}{2} = 3$

  $\dots \quad |x-(-2)| \le 3, \quad \text{tj.} \quad |x+2| \le 3$



Definice :

Okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$U_\varepsilon(c) \ = \ \{\, x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x-c| < \varepsilon \,\} \qquad \big[\ = \ (c-\varepsilon, c+\varepsilon)\ \big].$$

Prstencovým okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$P_\varepsilon(c) \ = \ U_\varepsilon(c) \setminus \{c\} \qquad \big[\ = \ (c-\varepsilon, c) \cup (c, c+\varepsilon)\ \big].$$

Poznámka: Analogicky (přes vzdálenost) lze definovat okolí/prstencová okolí i v $\mathbb{C}$.

Definice :

Pravým (levým) okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$U_\varepsilon^+(c) \ = \ \langle c,\, c+\varepsilon) \qquad \big(\ U_\varepsilon^-(c) \ = \ (c-\varepsilon,\, c\rangle\ \big)$$

Pravým (levým) prstencovým okolím bodu $c \in \mathbb{R}$ **o poloměru** $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu

$$P_\varepsilon^+(c) \ = \ (c, c+\varepsilon) \qquad \big(\ P_\varepsilon^-(c) \ = \ (c-\varepsilon, c)\ \big)$$

Poznámka: Dolní index, udávající poloměr okolí, často vynecháváme.

1.3. Supremum a infimum

Definice :

Řekneme, že $b \in M$ je **největším prvkem** (maximem) množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $b = \max M$), jestliže v M neexistuje prvek větší než b.
Řekneme, že $a \in M$ je **nejmenším prvkem** (minimem) množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $a = \min M$), jestliže v M neexistuje prvek menší než a.

Příklad 1.3: **a)** $\min\{-2, 3, 8, 25, 57\} = -2, \quad \max\{-2, 3, 8, 25, 57\} = 57;$

b) $\min \mathbb{N} = 1, \quad \max \mathbb{N}$ neexistuje;

c) $\min\{\, 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \,\} = 0 \quad \big(= 1 - \frac{1}{1} \big), \quad \max\{\, 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ neexistuje;

d) $\min\{\, x \mid (3 < x < 6) \vee x = 10\}$ neexistuje, $\quad \max\{\, x \mid (3 < x < 6) \vee x = 10\} = 10.$

Příklad 1.4: <u>Celá část</u> čísla $x \in \mathbb{R}$: $\quad [x] = \max\{\, k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x \,\} \quad (\in \mathbb{Z})$;

<u>lomená část</u> čísla $x \in \mathbb{R}$: $\quad x - [x] \quad (\in \langle\, 0,\, 1)\,)$.

Definice:

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **shora omezená**, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí $x \leq K$. Číslo K nazýváme **horní mezí** množiny M.
Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **zdola omezená**, jestliže existuje číslo $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí $L \leq x$. Číslo L nazýváme **dolní mezí** množiny M.
Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Poznámka:

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, právě když existuje $S \in \mathbb{R}$ takové, že $|x| \leq S$ pro všechna $x \in M$.

Příklad 1.5: **a)** $\{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \,\}$ ... množina je omezená jen zdola (např. $L = 0$ nebo $L = -1$, $L = -158{,}6$);

b) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \,\}$ ... množina je omezená jen shora (např. $K = -3$ nebo $K = 0$, $K = \sqrt{3}$);

c) $\langle -5,\, 1)$ ... množina je omezená shora i zdola, tj. je omezená (např. $S = 5$ nebo $S = 5{,}01$, $S = 3596$);

d) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 10 \,\}$ ... množina není omezená ani shora ani zdola.

Definice:

Řekneme, že číslo $b \in \mathbb{R}$ je **supremem** neprázdné množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $b = \sup M$), jestliže je nejmenší horní mezí množiny M.
Řekneme, že číslo $a \in \mathbb{R}$ je **infimem** neprázdné množiny $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $a = \inf M$), jestliže je největší dolní mezí množiny M.

Poznámka:

Pro supremum b množiny M tedy platí:

- Každý prvek množiny M je menší nebo roven b (protože b je horní mez).
- Vezmeme-li jakékoliv číslo c menší než b, pak už to není horní mez (b je nejmenší horní mez). Tedy v M najdeme prvek, který je větší než c.

Analogicky pro infimumum a množiny M platí:

- Každý prvek množiny M je větší nebo roven a (protože a je dolní mez).
- Vezmeme-li jakékoliv číslo c větší než a, pak už to není dolní mez (a je největší dolní mez). Tedy v M najdeme prvek, který je menší než c.

Platí: Má-li množina M největší (nejmenší) prvek, pak je tento prvek i supremem (infimem) množiny M.

Věta 1.2 (o supremu a infimu):

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Je-li M shora omezená, pak existuje $\sup M \in \mathbb{R}$. Je-li M zdola omezená, pak existuje $\inf M \in \mathbb{R}$.

1.4. Rozšíření množiny reálných čísel

nevlastní čísla (hodnoty) $\ldots$ $(+)\infty,\ -\infty$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ $\ldots$ **rozšířená reálná osa**

Uspořádání na $\mathbb{R}^*$ – stejné jako na $\mathbb{R}$, jen navíc přidáváme

- $-\infty < +\infty$,
- $-\infty < a, \quad a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$

Neomezené intervaly $(a \in \mathbb{R})$

- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $(-\infty, a\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$

Okolí bodů $+\infty,\ -\infty$ $(K > 0)$

- $U_K(+\infty) = U_K^-(+\infty) = P_K(+\infty) = P_K^-(+\infty) = (K, +\infty)$,
- $U_K(-\infty) = U_K^+(-\infty) = P_K(-\infty) = P_K^+(-\infty) = (-\infty, -K)$

Poznámka: Všimněte si, že všechny intervaly i okolí, které uvažujeme, obsahují pouze reálná (tj. konečná) čísla.

Aritmetické operace s nevlastními hodnotami $(a \in \mathbb{R})$

Definujeme:

- $a + \infty = \infty \quad (= a - (-\infty))$ $\qquad a - \infty = -\infty \quad (= a + (-\infty))$
- $\infty + \infty = \infty \quad (= \infty - (-\infty))$ $\qquad -\infty - \infty = -\infty \quad (= -\infty + (-\infty))$
- $a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0 \\ -\infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$ $\qquad a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0 \\ \infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$ $\qquad \infty \cdot (-\infty) = -\infty$
- $\dfrac{\pm\infty}{a} = (\pm\infty) \cdot a^{-1}$ pro $a \neq 0$ $\qquad \dfrac{a}{\pm\infty} = 0$

Nedefinujeme:

- $\infty - \infty, \quad \infty + (-\infty)$
- $(\pm\infty) \cdot 0$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \dfrac{\pm\infty}{0}, \quad \dfrac{a}{0}$

Definice:

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Je-li M shora neomezená, pak pokládáme $\sup M = +\infty$, je-li M zdola neomezená, pokládáme $\inf M = -\infty$.

Poznámka: Kdybychom chtěli definovat supremum i pro prázdnou množinu tak, aby mělo analogické vlastnosti jako v případě množin neprázdných (viz poznámku za definicí suprema a infima omezené množiny), museli bychom položit $\sup \emptyset = -\infty$. Infimum prázdné množiny by analogicky muselo být definováno rovností $\inf \emptyset = +\infty$. Prázdná množina by pak byla jedinou podmnožinou reálných čísel, která by měla větší infimum než supremum.

Příklad 1.6: **a)** pro $M = \{-2, 3, 8, 25, 57\}$ platí $\inf M = \min M = -2$, $\sup M = \max M = 57$; **b)** pro $M = \mathbb{N}$ máme $\inf M = \min M = 1$, $\sup M = +\infty$; **c)** pro $M = \{\, 1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\,\}$ je $\inf M = \min M = 0$, $\sup M = 1$; **d)** pro $M = \{\, x \,|(3 < x < 6) \vee x = 10\}$ platí $\inf M = 3$, $\sup M = \max M = 10$. (Srovnejte s Příkladem 1.3.)

1.5. Dodatky

Věta 1.3 :

Jsou-li a, b reálná čísla, $a < b$, pak v intervalu $(\,a\,,\,b\,)$ leží alespoň jedno racionální číslo a alespoň jedno číslo iracionální. Speciálně mezi každými dvěma racionálními čísly leží alespoň jedno číslo iracionální a mezi každými dvěma iracionálními čísly leží alespoň jedno číslo racionální.

Důsledek 1.4 :

Jsou-li a, b reálná čísla, $a < b$, pak v intervalu $(\,a\,,\,b\,)$ leží nekonečně mnoho racionálních čísel a také nekonečně mnoho čísel iracionálních.

Věta 1.5 (princip vnořených intervalů) :

a) Nechť $I_n = \langle\, a_n\,,\ b_n\,\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, jsou takové uzavřené intervaly, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $I_{n+1} \subset I_n$. Pak $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ (tj. všechny intervaly I_n mají společný alespoň jeden bod).

b) Jestliže navíc ke každému $\varepsilon > 0$ existuje interval I_k takový, že $b_k - a_k < \varepsilon$ (a tedy i $b_m - a_m < \varepsilon$ pro všechna $m > k$), pak $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ obsahuje jediný bod.

Poznámka: Ve Větě 1.5 je podstatné, že intervaly I_n jsou uzavřené. Např. pro intervaly $I_n = (\,0\,,\,\frac{1}{n}\,\rangle$ platí $I_{n+1} \subset I_n$, žádný společný bod ale tyto intervaly nemají.

Vzájemná poloha bodu a množiny

- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **vnitřním bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže existuje jeho okolí, které celé leží v množině M. Zřejmě pak $a \in M$. Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřek** množiny M a značíme M°.
- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **hraničním bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže každé jeho okolí má neprázdný průnik jak s množinou M, tak i s jejím doplňkem $\mathbb{R} \setminus M$, tj. každé okolí bodu a obsahuje alespoň jeden bod, který v M leží, a alespoň jeden bod, který v M neleží. Samotný bod a nemusí v M ležet. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranice** množiny M (a značíme ∂M).
- Bod $a \in \mathbb{R}$ je bodem **uzávěru** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod množiny M. Uzávěr množiny M značíme $\overline{M}$. Zřejmě platí $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$.
- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **hromadným bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny M. To nastává právě tehdy, když v každém prstencovém okolí bodu a leží alespoň jeden bod množiny M. Samotný bod a nemusí v M ležet.

  Někdy se hodí povolit, aby a bylo $+\infty$ nebo $-\infty$, tj. $a \in \mathbb{R}^*$. To uděláme při definici limity vzhledem k množině.

- Bod $a \in \mathbb{R}$ je **izolovaným bodem** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže $a \in M$ a existuje jeho prstencové okolí, v kterém neleží žádný bod množiny M.

Je-li např. I omezený interval (libovolného typu) s krajními body $a < b$, $c > b$ a $M = I \cup \{c\}$, pak vnitřními body množiny M jsou právě všechny body otevřeného intervalu (a, b) a hraničními body jsou body a, b a c (tj. $M^\circ = (a, b), \overline{M} = \langle a,\, b\rangle \cup \{c\}$). Hromadnými body množiny M jsou všechny body uzavřeného intervalu $\langle a,\, b\rangle$. Množina M má jediný izolovaný bod c. (Nakreslete si obrázek.)

Množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel nemá žádný vnitřní bod, všechny její body jsou izolované. Je tvořena samými hraničními body, jejím jediným hromadným bodem v $\mathbb{R}^*$ je $+\infty$, v $\mathbb{R}$ žádný hromadný bod nemá.