ÚVOD

0.1. Množiny

množina, prvek množiny, prázdná množina

Poznámka: Označení číselných množin

- $\mathbb{N}$ ... přirozená čísla
- $\mathbb{N}_0$ ... přirozená čísla a nula
- $\mathbb{Z}$ ... celá čísla ($\mathbb{Z}^+$ − celá kladná, $\mathbb{Z}_0^+$ − celá nezáporná, ...)
- $\mathbb{Q}$ ... racionální čísla ($\mathbb{Q}^+$, ...)
- $\mathbb{R}$ ... reálná čísla ($\mathbb{R}^+$, ...)
- $\mathbb{C}$ ... komplexní čísla

systém množin ... „množina množin“ (např.: $\mathcal{S} = \{\langle 0,\, n\rangle \,|\, n \in \mathbb{N}\}$)

Podmnožiny:

- $B \subset A$ ... B je **podmnožina** množiny A ... $x \in B \Rightarrow x \in A$ ($\Rightarrow$ ... „jestliže ..., pak“)

  (jiná značení: $B \subseteq A$, $B \subsetneqq A$, někdy též $A \supset B$ apod.)

  Platí: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$ ($\Leftrightarrow$ ... „právě tehdy, když“, $\wedge$ ... „a zároveň“)
- $B \subsetneqq A$ ... B je **vlastní podmnožina** množiny A ... $B \subset A \wedge B \neq A$

Operace s množinami:

- **sjednocení množin** $A,\ B$**:** $A \cup B = \{x |\, x \in A \vee x \in B\}$ ($\vee$ ... „nebo“ (nevylučovací))

- **průnik množin** $A,\ B$**:** $A \cap B = \{x |\, x \in A \wedge x \in B\}$

  $A \cap B = \emptyset$ ... A a B jsou **disjunktní**

- **rozdíl množin** $A,\ B$**:** $A \setminus B = \{x |\, x \in A \wedge x \notin B\}$ (jiné značení: $A - B$)

- **kartézský součin množin** $A,\ B$**:** $A \times B = \{\, (a,b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\,\}$

  pro n množin: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \underbrace{a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n}_{a_i \in A_i \text{ pro } i=1,\ldots,n}\,\}$

  n**-tá kartézská mocnina množiny** A**:** $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n-\text{krát}}$

Obecněji: I - indexová množina, $\{A_i\}_{i \in I}$ - systém množin

- sjednocení: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{\, x \mid \exists\, i \in I : x \in A_i\,\}$
- průnik: $\bigcap_{i \in I} A_i = \{\, x \mid \forall\, i \in I : x \in A_i\,\}$

($\forall$ ... „pro všechna“, „pro každé“, $\exists$ ... „existuje (alespoň jedno)“)

speciálně pro $I = \mathbb{N}$ resp. $I = \{1, 2, \ldots n\}$: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ resp. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

(ve vzorcích mimo text se používají zápisy: $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i,\ \bigcap_{i \in I} A_i,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i$)

Veronika Sobotíková, FEL ČVUT Praha

0.2. Zobrazení

f - **zobrazení množiny** A **do množiny** B**:** $f : A \to B$ (jiné značení: $A \xrightarrow{f} B$)
každému prvku $a \in A$ přiřadí f právě jeden prvek $b \in B$ (ne více než jeden!)
(a - **vzor**, b - **obraz** (prvku a))
píšeme: $f(a) = b$
(je-li B číselná množina, používáme často název **funkce**)

pro $f : A \to B$:
definiční obor zobrazení f: $D(f) = A$ (množina všech vzorů)
obor hodnot zobrazení f: $H(f) = \{ b \in B \mid \exists\, a \in A : f(a) = b\}$ (množina všech obrazů)

rovnost zobrazení f, g: $f = g$
$D(f) = D(g)$ a pro každé $x \in D(f)\,(= D(g))$ platí $f(x) = g(x)$

Speciální případy ($f : A \to B$)

- **prosté** zobrazení (injektivní, injekce):
  je-li $a_1,\ a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2$, pak $f(a_1) \neq f(a_2)$ (tj. různé vzory mají různé obrazy)
  (jinými slovy: je-li $a_1,\ a_2 \in A,\ f(a_1) = f(a_2)$, pak $a_1 = a_2$)

- zobrazení **na** (surjektivní, surjekce):
  $H(f) = B$ (tj. každý prvek množiny B je obrazem alespoň jednoho prvku množiny A)

- **vzájemně jednoznačné** zobrazení (**bijektivní, bijekce**):
  současně **prosté** i **na**

Inverzní zobrazení

inverzní zobrazení k prostému zobrazení $f : A \to B$:

$$f_{-1} : H(f) \to A, \qquad f_{-1}(y) = x \ \Leftrightarrow\ f(x) = y$$

$D(f_{-1}) = H(f),\quad H(f_{-1}) = D(f)$

je-li f bijekce, pak $f_{-1} : B \to A$ a f_{-1} je také bijekce

Skládání zobrazení

složené zobrazení zobrazení $f : A \to B$ a $g : C \to D$, kde $H(f) \subset C\ (= D(g))$:

$$h : A \to D, \qquad h(a) = g(f(a)) \quad \text{pro } a \in A$$

f - vnitřní zobrazení, g - vnější zobrazení
píšeme: $h = g \circ f$

Příklad 0.1: Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, a $g_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = \dfrac{1}{x}$, máme

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = \dfrac{1}{(2x)^2+1} = \dfrac{1}{4x^2+1}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) = \dfrac{2}{x^2+1}$, tedy $g \circ f \neq f \circ g$.
- $(f \circ g_1)(x) = f(g_1(x)) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2}{x}$, protože však $H(f) \not\subset D(g_1)$, nelze f a g_1 skládat v opačném pořadí (tj. v pořadí $g_1 \circ f$).