Příklad 8.7: Vyjádřete a) $\int f(x+B)\,\mathrm{d}x$, b) $\int f(Ax+B)\,\mathrm{d}x$ (A, $B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$) pomocí primitivní funkce F k funkci f.

Řešení: F – primitivní funkce k funkci f na (a,b)

a) $$\int f(x+B)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} x+B & = & z \\ 1\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}z \end{array} \right| = \int f(z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= F(z)+c = F(x+B)+c \qquad \text{na} \quad (a-B, b-B)$$

b) $$\int f(Ax+B)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} Ax+B & = & u \\ A\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{1}{A}\int f(\overbrace{Ax+B}^{u})\cdot\overbrace{A\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}u} =$$

$$= \frac{1}{A}\int f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{A}F(u)+c = \frac{1}{A}F(Ax+B)+c$$

na $I = \{x \,|\, Ax+B \in (a,b)\}$.

Příklad 8.8: Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{1}{x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{x^2}{5}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{rcl} u & = & \frac{x}{\sqrt{5}} \\ \mathrm{d}u & = & \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg} u + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + c \qquad \text{na} \quad \mathbb{R}\,.$$