Příklad 8.12: Rozložte na součet polynomu a jednoduchých zlomků funkci $R(x) = \dfrac{x^6 + 2x^4 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2}$

Řešení: $x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1)$, tedy $D(R) = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

- $$\begin{array}{l} (\ x^6 + 0x^5 + 2x^4 + 0x^3 + 3x^2 + x - 1) : (x^5 - x^2) = \\ \underline{-x^6 \qquad\qquad\qquad\quad + \ x^3 \qquad\qquad\qquad\quad} \\ \qquad\qquad\qquad 2x^4 \ + \ x^3 + 3x^2 + x - 1 \end{array}$$

  $$= x + \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^5 - x^2} = R(x) = x + R_1(x)$$

- $x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$

  polynom $x^2 + x + 1$ nemá reálné kořeny

- $$R_1(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

  Rovnost vynásobíme výrazem $x^2(x-1)(x^2+x+1)$:

  $$2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1 =$$

  $$= A \underbrace{(x^3-1)}_{(x-1)(x^2+x+1)} + B \underbrace{(x^4-x)}_{x(x-1)(x^2+x+1)} + C \underbrace{(x^4+x^3+x^2)}_{x^2(x^2+x+1)} +$$

  $$+ (Dx+E)\underbrace{(x^3-x^2)}_{x^2(x-1)} =$$

  $$= Ax^3 - A + Bx^4 - Bx + Cx^4 + Cx^3 + Cx^2 +$$

  $$+Dx^4 - Dx^3 + Ex^3 - Ex^2 =$$

  $$= (B+C+D)x^4 + (A+C-D+E)x^3 + (C-E)x^2 - Bx - A$$

$$2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1 =$$

$$= (B + C + D)x^4 + (A + C - D + E)x^3 + (C - E)x^2 - Bx - A$$

Porovnáme koeficienty polynomů u stejných mocnin:

$$\begin{array}{lrcl}
x^4: & 2 & = & B + C + D \\
x^3: & 1 & = & A + C - D + E \\
x^2: & 3 & = & C - E \\
x^1: & 1 & = & -B \\
x^0: & -1 & = & -A
\end{array}$$

Vyřešením soustavy rovnic dostaneme:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 2, \quad D = 1, \quad E = -1,$$

tedy

$$R(x) = x + \underbrace{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}}_{R_1(x)}.$$

Zakrývací pravidlo

Lze ho použít k určení koeficientů v čitateli u zlomků, které mají ve jmenovateli nejvyšší mocniny jednotlivých kořenových činitelů. (Zde tedy k výpočtu koeficientů A a C.) Zmenšíme tím počet neznámých v soustavě lineárních rovnic.

Postupujeme tak, že danou ryze lomenou funkci zapíšeme se zcela rozloženým jmenovatelem

$$R_1(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} ,$$

zakryjeme kořenový činitel jmenovatele a odpovídající kořen dosadíme do zbytku:

$$x := 0 \qquad A = \left.\frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right|_{x=0} = \frac{0+0+0+0-1}{(0-1)\cdot(0+0+1)} = 1,$$

$$x := 1 \qquad C = \left.\frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2(x^2+x+1)}\right|_{x=1} = \frac{2+1+3+1-1}{1\cdot(1+1+1)} = 2.$$