7.5 Příklady

Příklad 7.2: Najděte lokální extrémy funkce
$f(x) = x^3 - (x + 2|x|)$ a vyšetřete monotonii této funkce.

Řešení: f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & \text{pro } x \leq 0 \\ x^3 - 3x & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{pro } x < 0 \\ 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 = f'_-(0) \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -3 = f'_+(0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f'(0) \text{ neexistuje}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{pro} \quad x < 0 \\ 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) & \text{pro} \quad x > 0 \end{cases}$$

- <u>na $(-\infty; 0)$</u>

  $f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ je rostoucí na $(-\infty; 0)$

- <u>na $(0; +\infty)$</u>

  $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$ – stacionární bod

  $f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (1; \infty) \quad \Longrightarrow \quad f$ je rostoucí na $(1; \infty)$

  $f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (0; 1) \quad \Longrightarrow \quad f$ je klesající na $(0; 1)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & 0 & & 1 & \\ f' & + & | & - & | & + \\ \hline f & \nearrow & | & \searrow & | & \nearrow \end{array}$$

		0		1	
f'	$+$	$\mid$	$-$	$\mid$	$+$
f	$\nearrow$	$\mid$	$\searrow$	$\mid$	$\nearrow$

ze spojitosti:

f je rostoucí na $(-\infty, 0\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$

f je klesající na $\langle 0, 1\rangle$

f má ostré lokální maximum v bodě $x_1 = 0, \quad f(0) = 0$

f má ostré lokální minimum v bodě $x_2 = 1, \quad f(1) = -2$

(ověření extrému v bodě $x_2 = 1$ pomocí druhé derivace:
pro $x > 0$ je $f''(x) = 6x$, tj. $f''(1) = 6 > 0$
$\Longrightarrow$ v $x_2 = 1$ nabývá f lokálního minima $f(1) = -2$)

Příklad 7.4: Najděte (maximální) intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x \ln^2 x$ konvexní, konkávní; najděte inflexní body jejího grafu.

Řešení: Zřejmě $D(f) = (0; \infty)$. Dále:

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2 \ln x,$$

$$f''(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} (\ln x + 1),$$

tedy $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$,

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{\mathrm{e}}; \infty\right)$, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$	
f''	|	$-$	|	$+$
f	|	$\cap$	|	$\cup$

odtud

f je ryze konvexní na intervalu $\langle \frac{1}{\mathrm{e}}, \infty)$

f je ryze konkávní na intervalu $(0, \frac{1}{\mathrm{e}} \rangle$

v $x_0 = \frac{1}{\mathrm{e}}$ má f inflexi.