

Základy matematické analýzy

ZS 2015/2016

Vzorová zadání písemné části zkoušky

Varianta 1

1. Vyšetřete limity (oboustranné i jednostranné) funkce f v bodě x_0 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{16x^2 + 9} - 5}{x - 1}, \quad x_0 = 1.$$

(6 bodů)

[$\frac{16}{5}$]

2. Najděte na maximálních intervalech

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

(6 bodů)

[$-\frac{1+\ln x}{x} + c$ na $(0, \infty)$ (per partes)]

3. Vypočtěte

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{10 \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$$

(8 bodů)

[$2\pi + 2 \ln 3$ ($t = \operatorname{tg} x$)]

4. Určete intervaly konvexity a konkavity a body inflexe funkce f na intervalu $(-\pi, \pi)$:

$$f(x) = e^x (\cos x + \sin x).$$

(6 bodů)

[konvexní na $\langle -\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \rangle$; konkávní na $(-\pi, -\frac{3}{4}\pi)$ a na $\langle \frac{1}{4}\pi, \pi \rangle$;
inflexe v bodech $-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi$]

5. Najděte asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} + \operatorname{arctg} x.$$

(6 bodů)

[$x = 0$, $y = x + \frac{\pi}{2}$ v $+\infty$, $y = x - \frac{\pi}{2}$ v $-\infty$]

6. Pomocí Laplaceovy transformace řešte rovnici

$$y'' + 2y' + 2y = t^2 + 2t - 1, \quad y(0+) = -1, \quad y'(0+) = 0.$$

(10 bodů)

[$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 1, t \geq 0$]

7. Uveďte definici funkce nerostoucí na množině M . Podle této definice rozhodněte, zda funkce $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ je nerostoucí na intervalu $(-\infty, 1)$.

(8 bodů)

[ANO – f je nerostoucí na $(-\infty, 1)$]

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Varianta 2

1. Vyšetřete limity (oboustranné i jednostranné) funkce
- f
- v bodě
- x_0
- :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} \cdot (\cotg(\pi x))^2, \quad x_0 = 2$$

(6 bodů) [neexistuje pro $x \rightarrow 2$; $+\infty$ pro $x \rightarrow 2^-$; $-\infty$ pro $x \rightarrow 2^+$]

2. Najděte Taylorův polynom řádu 4 funkce
- f
- v bodě
- $-\frac{\pi}{2}$
- :

$$f(x) = e^{\pi+2x} \cdot \cos x - 1.$$

(6 bodů) [$T(x) = -1 + (x + \frac{\pi}{2}) + 2(x + \frac{\pi}{2})^2 + \frac{11}{6}(x + \frac{\pi}{2})^3 + (x + \frac{\pi}{2})^4$]

3. Vypočítejte

$$\int_0^2 \arcsin \frac{x}{2} dx.$$

(8 bodů) [$\pi - 2$ ($= [x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}]_0^2$) (per partes)]

4. Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémů funkce

$$f(x) = x^6 + 2x^2 - 4 \operatorname{arctg}(x^2).$$

(10 bodů) [rostoucí na $\langle -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0 \rangle$ a $\langle \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, +\infty \rangle$, klesající na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{3}})$ a $\langle 0, \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \rangle$;lokální maximum: $f(0) = 0$, lokální minima: $f(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}) = f(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}) = \frac{7\sqrt{3}}{9} - \frac{2}{3}\pi$]

5. Najděte Laplaceův obraz funkce

$$f(t) = \frac{d}{dt} (e^{3t} \cos t + t^2 e^{4t}) + \int_0^t \cos(3u) du + t \sin 2t.$$

(6 bodů) [$p \left(\frac{p-3}{(p-3)^2+1} + \frac{2}{(p-4)^3} \right) - 1 + \frac{1}{p^2+9} + \frac{4p}{(p^2+4)^2}, p > 4$]

6. Najděte funkci
- $f(t)$
- , jejímž Laplaceovým obrazem je funkce

$$F(p) = \frac{p+7}{p^2+2p+5} + \frac{1}{p^3} e^{-2p}.$$

(6 bodů) [$f(t) = e^{-t}(\cos 2t + 3 \sin 2t)H(t) + \frac{1}{2}(t-2)^2 H(t-2)$]

7. Uveďte definici derivace funkce
- f
- v bodě
- x_0
- . Podle této definice najděte derivaci funkce

$$f(x) = (x^2 - 1) \cdot (\cosh x + \sinh x) \quad \text{v bodě } x_0 = 1.$$

(8 bodů) [$f'(1) = 2e$]**Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.**

- Vyšetřete limity (oboustranné i jednostranné) funkce f v bodě x_0 :

$$f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}+3}, \quad x_0 = 0$$

(6 bodů)

[e^2]

- Vyšetřete limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{2n-1} \cdot (\ln |\cos(n\pi)|).$$

(6 bodů)

[0]

- Vypočtěte

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$$

(8 bodů)

[$\ln 3$ ($t = \sqrt{x+1}$)]

- Určete intervaly konvexity a konkavity a body inflexe funkce f :

$$f(x) = -5x^6 + 3x^2 - \sqrt{5}x.$$

(6 bodů)

[konvexní na $\langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \rangle$; konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ a na $\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \infty \rangle$;
inflexe v bodech $-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$;]

- Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémů funkce

$$f(x) = (x+4)|x| + 2.$$

(10 bodů)

[rostoucí na $(-\infty, -2)$ a $\langle 0, +\infty \rangle$, klesající na $\langle -2, 0 \rangle$;lokální maximum: $f(-2) = 6$, lokální minimum: $f(0) = 2$]

- Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce f na intervalu $I = \langle 1, \infty \rangle$:

$$f(x) = \frac{\ln(e \cdot x)}{\sqrt{x}}.$$

(10 bodů)

[největší hodnota f na I : $f(e) = \frac{2}{\sqrt{e}}$; nejmenší hodnoty f na I nenabývá]

- Najděte Laplaceův obraz funkce

$$f(t) = \begin{cases} -2, & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ t^2 - 2, & t \in \langle 1, +\infty \rangle, \end{cases}.$$

(6 bodů)

[$F(p) = -\frac{2}{p} + \frac{2+2p+p^2}{p^3} e^{-p}$, $p > 0$]

- Pomocí Laplaceovy transformace řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$y_1' = -y_1 + 3y_2, \quad y_1(0+) = 4,$$

$$y_2' = y_1 - 3y_2 - e^{-t}, \quad y_2(0+) = 1.$$

(10 bodů)

[$y_1(t) = 3 + e^{-t}$, $y_2(t) = 1$, $t \geq 0$]

- Pomocí Laplaceovy transformace řešte rovnici

$$y' + 4y + 13 \int_0^t y(u) du = 0, \quad y(0+) = 1.$$

(10 bodů)

[$y(t) = e^{-2t}(\cos 3t - \frac{2}{3} \sin 3t)$, $t \geq 0$]

- Uveďte větu o Laplaceově obrazu derivace. Podle této věty odvoďte z Laplaceova obrazu funkce

$$f(t) = -\cos t \quad \text{Laplaceův obraz funkce } g(t) = \sin t.$$

(8 bodů)

[$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{p^2+1}$ ($\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{p}{p^2+1}$)]