Statistické testování algoritmů

Radek Mařík

ČVUT FEL, K13132

December 18, 2014

Obsah

1. Klasické propagování kovarianční matice
   - Motivace
   - Princip
2. Přímé propagování chyby
   - Princip
   - Variance
   - Min/Max chyba
   - Příklad
3. Propagace kovarianční matice - implicitní forma
   - Definice
   - Příklady
   - Validace algoritmů

Obsah

1 Klasické propagování kovarianční matice
- Motivace
- Princip

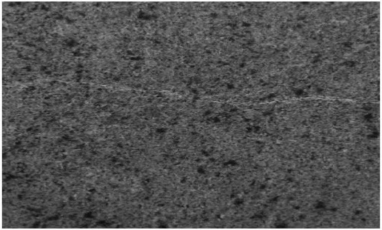
2 Přímé propagování chyby
- Princip
- Variance
- Min/Max chyba
- Příklad

3 Propagace kovarianční matice - implicitní forma
- Definice
- Příklady
- Validace algoritmů

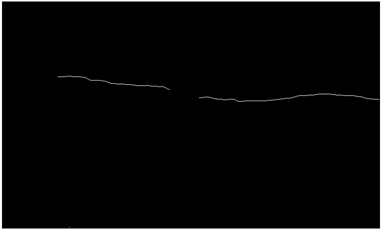
Zpracování textury

(a) Původní obraz

(b) Detekovaná skrvna

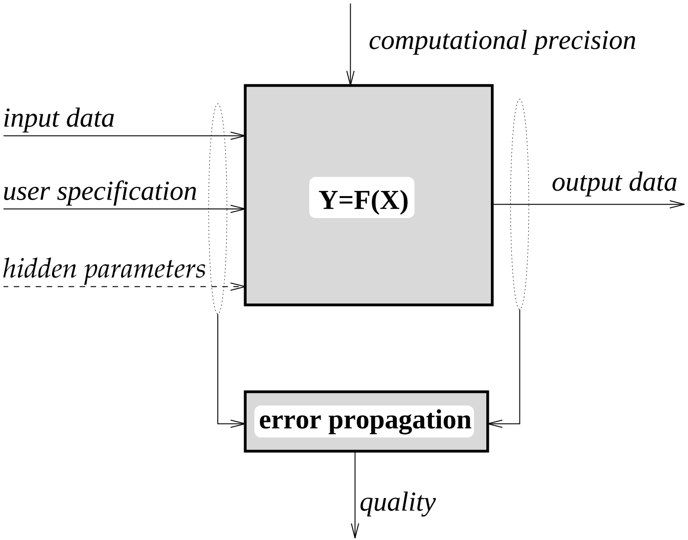


(c) Původní obraz



(d) Detekovaná prasklina

Model systému



Obsah

1. Klasické propagování kovarianční matice
   - Motivace
   - Princip
2. Přímé propagování chyby
   - Princip
   - Variance
   - Min/Max chyba
   - Příklad
3. Propagace kovarianční matice - implicitní forma
   - Definice
   - Příklady
   - Validace algoritmů

Propagace kovarianční matice

- vstupní data: $\mathbf{X}$
- výstupní data: $\mathbf{Y}$
- explicitní vztah: $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$

Propagace kovarianční matice:

$$\mathbf{\Sigma}_Y = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_X\mathbf{J}^T$$

kde

- $\mathbf{\Sigma}_Y$ ... kovarianční matice výstupních dat $\mathbf{Y}$,
- $\mathbf{\Sigma}_X$ ... kovarianční matice vstupních dat $\mathbf{X}$,
- $\mathbf{J}$ ... lineární operátor prvního řádu Taylorova rozvoje funkce $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ v okolí bodu $\mathbf{X}_0$.

Propagace kovariační matice - odvození

explicitní vztah: $\underline{\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})}$

Taylorův rozvoj v okolí bodu $\mathbf{X}_0$:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}\right|_{\mathbf{X}_0} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_0}$$

substituce:

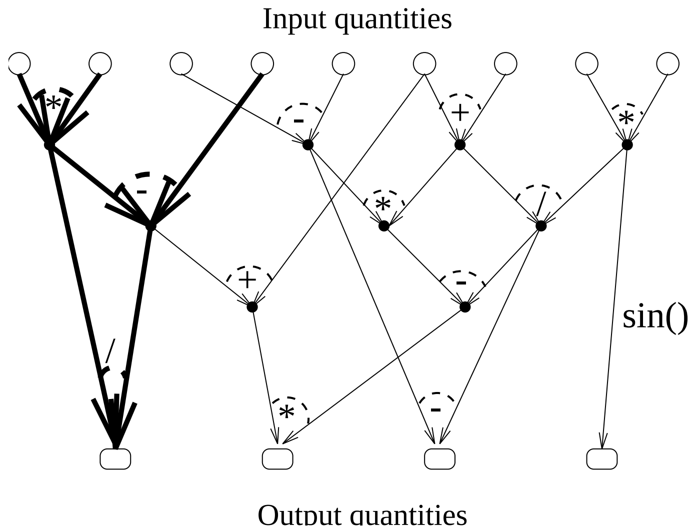
$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{X} &= \mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \qquad \delta\mathbf{Y} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0 \\
\mathbf{J}_0 &= \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}\right|_{\mathbf{X}_0} \ldots \text{Jakobián}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{Y} &= \mathbf{J}_0 \cdot \delta\mathbf{X} + \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_0} \\
\delta\mathbf{Y} \cdot \delta\mathbf{Y}^T &= (\mathbf{J}_0 \cdot \delta\mathbf{X} + \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_0})(\mathbf{J}_0 \cdot \delta\mathbf{X} + \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_0})^T = \mathbf{J}_0 \cdot \delta\mathbf{X} \cdot \delta\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{J}_0^T + \mathbf{R}_{\mathbf{YY}_0} \\
\underline{\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{YY_0}}} &= 1/n\Sigma_{i=1}^{n}(\delta\mathbf{Y}_i \cdot \delta\mathbf{Y}_i^T) = 1/n\Sigma_{i=1}^{n}(\mathbf{J}_0 \cdot \delta\mathbf{X}_i \cdot \delta\mathbf{X}_i^T \cdot \mathbf{J}_0^T) = \\
&= \mathbf{J}_0 \cdot \underbrace{1/n\Sigma_{i=1}^{n}(\delta\mathbf{X}_i \cdot \delta\mathbf{X}_i^T)}_{\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{XX_0}}} \cdot \mathbf{J}_0^T = \underline{\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{XX_0}} \cdot \mathbf{J}_0^T}
\end{aligned}$$

Obsah

1. Klasické propagování kovarianční matice
   - Motivace
   - Princip
2. Přímé propagování chyby
   - Princip
   - Variance
   - Min/Max chyba
   - Příklad
3. Propagace kovarianční matice - implicitní forma
   - Definice
   - Příklady
   - Validace algoritmů

Model datového toku



Přímé propagování chyby

- Odpadá zdlouhavé odvození chybového modelu.
- **Substituce hodnot proměnných strukturami** modelu chyby.
- “Symbolická derivace” následovaná výpočtem.
- Bodová analýza.
- Výpočet okamžité chyby.
- Lze hodnotit přesnost výpočtu.
- Předpokládá dostupnost zdrojového kódu.
- Chybový model jakéhokoliv hodnoty proměnné je vypočten pomocí chybových modelů vstupních operandů operace.
- Parametry chybových modelů:
  - dáno,
  - určené přesností měření,
  - určené předchozími výpočty.

Přímé propagování chyby - implementace

- Založeno na přetížení operátorů v objektově-orientovaném kódování.
- Přepínání mezi normálním kódem a kódem propagující chyby.

C++ normální kód

```
typedef double RealT;
```

C++ kód propagující chyby

```
class RealT .......;
```

Příklad

```
RealT x, a=3, b=5;
x = a + b;
```

Přímé propagování chyby - implementace

- Založeno na přetížení operátorů v objektově-orientovaném kódování.
- Přepínání mezi normálním kódem a kódem propagující chyby.

C++ normální kód

```
typedef double RealT;
```

C++ kód propagující chyby

```
class RealT  .......;
```

Příklad

```
RealT x, a=3, b=5;
x = a + b;
```

Obsah

1 Klasické propagování kovarianční matice
- Motivace
- Princip

2 Přímé propagování chyby
- Princip
- Variance
- Min/Max chyba
- Příklad

3 Propagace kovarianční matice - implicitní forma
- Definice
- Příklady
- Validace algoritmů

Propagace variance

Dána funkce $g(x,y)$ dvou proměnných x a y s variancemi σ_{xx}^2 a σ_{yy}^2 a kovariancí σ_{xy}.

Variance hustoty chyb hodnot funkce

$$\begin{aligned}\sigma_{gg}^2(x_0,y_0) \quad = \quad & \sigma_{xx}^2(\partial g/\partial x)^2\big|_{(x_0,y_0)} \\ & + \sigma_{yy}^2(\partial g/\partial y)^2\big|_{(x_0,y_0)} \\ & +2\,\sigma_{xy}(\partial g/\partial x)(\partial g/\partial y)\big|_{(x_0,y_0)}\end{aligned}$$

Typické zjednodušení: $\sigma_{xy} = 0$

$$\sigma_{gg}^2(x_0,y_0) = \sigma_{xx}^2(\partial g/\partial x)^2\big|_{(x_0,y_0)} + \sigma_{yy}^2(\partial g/\partial y)^2\big|_{(x_0,y_0)}$$

Propagace variance

Dána funkce $g(x, y)$ dvou proměnných x a y s variancemi σ^2_{xx} a σ^2_{yy} a kovariancí σ_{xy}.

Variance hustoty chyb hodnot funkce

$$\begin{aligned}\sigma^2_{gg}(x_0, y_0) \quad = \quad & \sigma^2_{xx}(\partial g/\partial x)^2\big|_{(x_0,y_0)} \\ & + \sigma^2_{yy}(\partial g/\partial y)^2\big|_{(x_0,y_0)} \\ & + 2\,\sigma_{xy}(\partial g/\partial x)(\partial g/\partial y)\big|_{(x_0,y_0)}\end{aligned}$$

Typické zjednodušení: $\sigma_{xy} = 0$

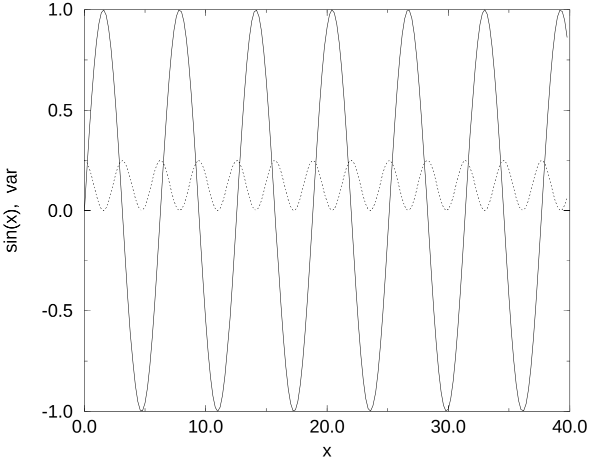
$$\sigma^2_{gg}(x_0, y_0) = \sigma^2_{xx}(\partial g/\partial x)^2\big|_{(x_0,y_0)} + \sigma^2_{yy}(\partial g/\partial y)^2\big|_{(x_0,y_0)}$$

Propagace variance

Základní aritmetické operace a standardní funkce:

Funkce	Propagace variance
$z = x + y$	$\sigma_{zz}^2 = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2$
$z = x - y$	$\sigma_{zz}^2 = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2$
$z = xy$	$\sigma_{zz}^2 = y_0^2\sigma_{xx}^2 + x_0^2\sigma_{yy}^2$
$z = x/y$	$\sigma_{zz}^2 = (\sigma_{xx}^2 + x_0^2/y_0^2\sigma_{yy}^2)/y_0^2$
$z = x^2$	$\sigma_{zz}^2 = 4x_0^2\sigma_{xx}^2$
$z = \sqrt{x}$	$\sigma_{zz}^2 = \frac{1}{4x_0}\sigma_{xx}^2$
$z = \sin x$	$\sigma_{zz}^2 = \cos^2 x_0\, \sigma_{xx}^2$
$z = \cos x$	$\sigma_{zz}^2 = \sin^2 x_0\, \sigma_{xx}^2$
$z = e^x$	$\sigma_{zz}^2 = e^{2x_0}\, \sigma_{xx}^2$
$z = \ln x$	$\sigma_{zz}^2 = 1/x_0^2\sigma_{xx}^2$
$z = \log_a x$	$\sigma_{zz}^2 = \frac{1}{(x_0 \ln a)^2}\sigma_{xx}^2$
$z = x^y$	$\sigma_{zz}^2 = (y_0^2/x_0^2\sigma_{xx}^2 + \ln^2 x_0\, \sigma_{yy}^2)\, x_0^{2y_0}$

Propagace variance - příklad



Hodnoty funkce $\sin x$ pro argument s absolutní chybou ± 0.25.

Obsah

1. Klasické propagování kovarianční matice
   - Motivace
   - Princip
2. Přímé propagování chyby
   - Princip
   - Variance
   - Min/Max chyba
   - Příklad
3. Propagace kovarianční matice - implicitní forma
   - Definice
   - Příklady
   - Validace algoritmů

Propagace chyby Min/Max

Uzavřený interval reálných čísel nebo *Interval*

$$\begin{aligned} A &= [a_{min}, a_{max}] \\ &= \{t | a_{min} \leq t \leq a_{max}, a_{min}, a_{max} \in \mathcal{R}\} \end{aligned}$$

- $I(\mathcal{R})$ ... množina uzavřených intervalů,
- $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ ... intervaly z $I(\mathcal{R})$.

Nechť $* \in \{+, -, \cdot, :\}$ je binární operace na množině reálných čísel $\mathcal{R}$. Jestliže $A, B \in I(\mathcal{R})$, potom

$$A * B = \{z = a * b | a \in A, b \in B\}$$

definuje binární operace na $I(\mathcal{R})$.

Propagace chyby Min/Max - operace

Vstupní hodnoty:

$$x \in [x_{min}, x_{max}], y \in [y_{min}, y_{max}]$$

Funkce	Výstupní Min/Max intervaly
$z = x + y$	$[x_{min} + y_{min}, x_{max} + y_{max}]$
$z = x - y$	$[x_{min} - y_{max}, x_{max} - y_{min}]$
$z = x \cdot y$	$[\min\{x_{min} \cdot y_{min}, x_{min} \cdot y_{max}, x_{max} \cdot y_{min}, x_{max} \cdot y_{max}\}, \max\{x_{min} \cdot y_{min}, x_{min} \cdot y_{max}, x_{max} \cdot y_{min}, x_{max} \cdot y_{max}\}]$
$z = x/y$	$[x_{min}, x_{max}] \cdot [1/y_{max}, 1/y_{min}]$

Jestliže $g(x)$ je spojitá unární operace na $\mathcal{R}$, potom

$$g(X) = [\min_{x \in X} g(x), \max_{x \in X} g(x)]$$

definuje *unarní operarci* na $I(\mathcal{R})$.

Propagace chyby Min/Max - monotónní unární funkce

- rostoucí funkce $g_i(x)$:

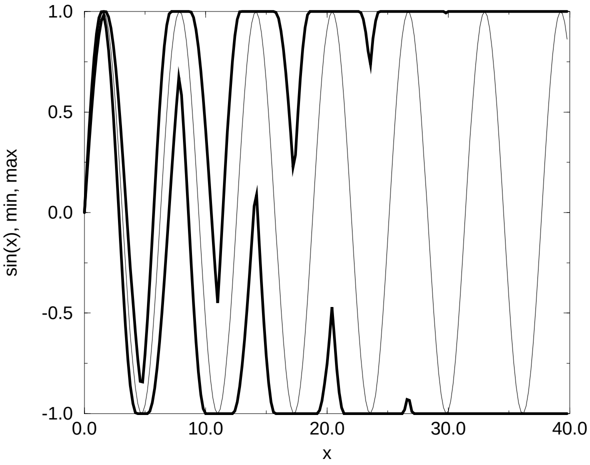
$$[x_{min}, x_{max}] \Longrightarrow [g_i(x_{min}), g_i(x_{max})]$$

- klesající funkce $g_d(x)$:

$$[x_{min}, x_{max}] \Longrightarrow [g_d(x_{max}), g_d(x_{min})]$$

Propagace chyby Min/Max - nemonotónní funkce

sin x s 10% relativní chybou argumentu



Obsah

1. Klasické propagování kovarianční matice
   - Motivace
   - Princip
2. Přímé propagování chyby
   - Princip
   - Variance
   - Min/Max chyba
   - Příklad
3. Propagace kovarianční matice - implicitní forma
   - Definice
   - Příklady
   - Validace algoritmů

Jednoduchý příklad

Funkce

$$f(x) = x + 10$$

Její implementace:

$$f_{imp}(x) = (x \cdot x - 100)/(x - 10).$$

Testován rozsah x: $[0, 20]$ s krokem 0.01.

Jednoduchý příklad - C++ kód

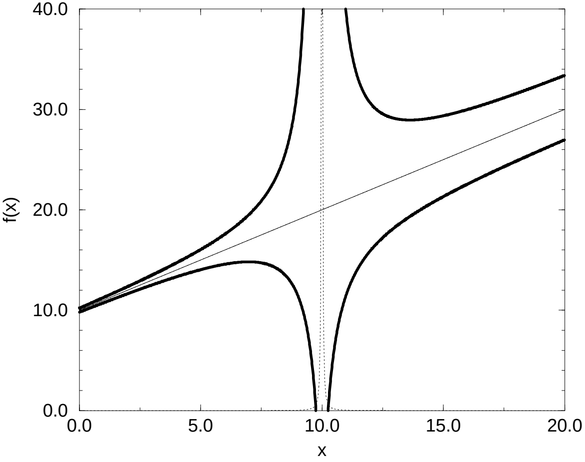
```
#include <iostream.h>
#include "StdType.hh"
int main(void)
{
  for (RealT x=0; x<=20; x+=0.01){
    if (x == 10) continue;  // to avoid division by zero
    cout << x << ' ' << (x*x -100)/(x-10) << '\n';
  }
  return 0;
}
```

StdType.hh:

- typedef double RealT;
- class RealT { .... };

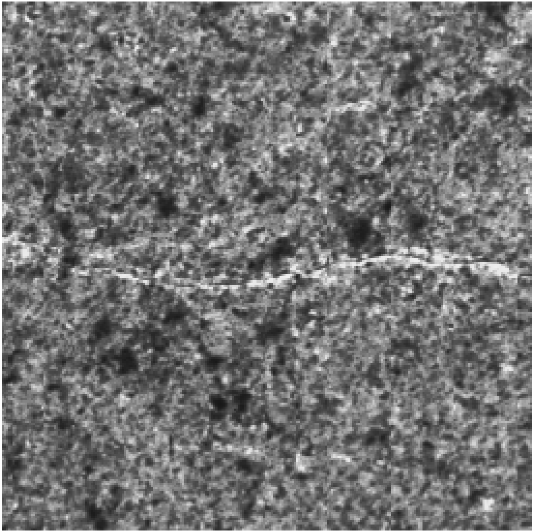
Jednoduchý příklad - výsledek

Relativní chyba 10% ve vstupních datech.

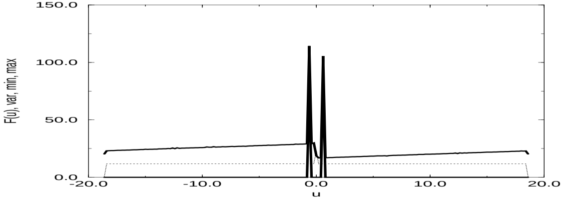


Detekce prasklin [SPK95]

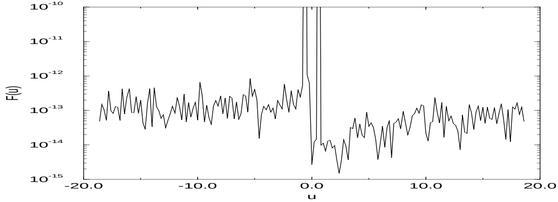
Textura žuly s horizontální prasklinou.



Výpočet DFT vzhledem k definici

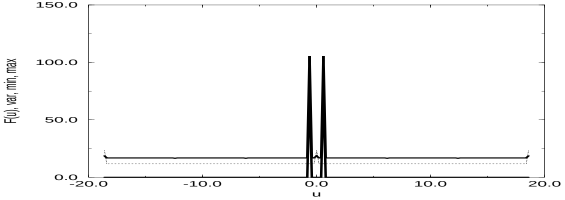


(a) 0.1% výpočetní chyba

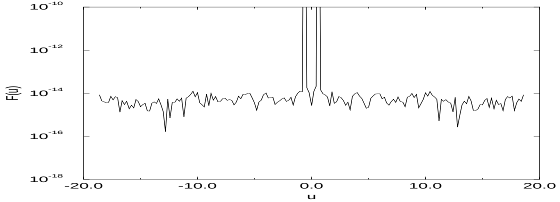


(b) přesnost procesoru - double

Výpočet DFT podle modifikace (modulo)



(a) 0.1% výpočetní chyba



(b) přesnost procesoru - double

Obsah

1. Klasické propagování kovarianční matice
   - Motivace
   - Princip
2. Přímé propagování chyby
   - Princip
   - Variance
   - Min/Max chyba
   - Příklad
3. Propagace kovarianční matice - implicitní forma
   - Definice
   - Příklady
   - Validace algoritmů

Propagace kovarianční matice - implicitní forma [Har94]

- vstupní data: $\mathbf{X}$
- výstupní data: $\mathbf{Y}$
- vztah mezi $\mathbf{Y}$ a $\mathbf{X}$ je vyjádřen implicitní skalární funkcí $F(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Definice úlohy: dáno $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}$, určit $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}_0 + \Delta\mathbf{Y}$ tak, aby se minimalizovala $F(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}})$ za předpokladu, že $\mathbf{Y}_0$ minimalizuje $F(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$.
Estimátor:

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\Delta\mathbf{Y}} = (\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}))^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{X}}(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}) \mathbf{\Sigma}_{\Delta\mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{X}}(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}})^T [(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}))^T]^{-1}$$

kde

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$$

Obsah

1. Klasické propagování kovarianční matice
   - Motivace
   - Princip
2. Přímé propagování chyby
   - Princip
   - Variance
   - Min/Max chyba
   - Příklad
3. Propagace kovarianční matice - implicitní forma
   - Definice
   - Příklady
   - Validace algoritmů

Jednoduchý příklad $y = x^2$

Explicitní propagace

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad \rightsquigarrow \qquad y = x^2 \\
J &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = 2x \\
\mathbf{\Sigma}_{y^2} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 2x\ \right| \left|\ \sigma_x^2\ \right| \left|\ 2x\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Implicitní propagace

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \qquad &\rightsquigarrow \qquad F(x; y) = (y - x^2)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod} \\
g &= \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - x^2) \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -4x \\
\mathbf{\Sigma}_{yy} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 1/2\ \right| \left|\ -4x\ \right| \left|\ \sigma_x^2\ \right| \left|\ -4x\ \right| \left|\ 1/2\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x^2$

Explicitní propagace

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad \rightsquigarrow \qquad y = x^2 \\ J &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = 2x \\ \boldsymbol{\Sigma}_{y^2} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 2x\ \right| \left|\ \sigma_x^2\ \right| \left|\ 2x\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right| \end{aligned}$$

Implicitní propagace

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \qquad \rightsquigarrow \qquad F(x; y) = (y - x^2)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod}$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - x^2) \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -4x \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yy} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 1/2\ \right| \left|\ -4x\ \right| \left|\ \sigma_x^2\ \right| \left|\ -4x\ \right| \left|\ 1/2\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right| \end{aligned}$$

Jednoduchý příklad $y = x^2$

Explicitní propagace

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad \rightsquigarrow \quad y = x^2$$
$$J = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = 2x$$
$$\mathbf{\Sigma}_{y^2} = \left| \sigma_y^2 \right| = \left| 2x \right| \left| \sigma_x^2 \right| \left| 2x \right| = \left| 4x^2\sigma_x^2 \right|$$

Implicitní propagace

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad \rightsquigarrow \quad F(x; y) = (y - x^2)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod}$$
$$g = \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - x^2)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -4x$$
$$\mathbf{\Sigma}_{yy} = \left| \sigma_y^2 \right| = \left| 1/2 \right| \left| -4x \right| \left| \sigma_x^2 \right| \left| -4x \right| \left| 1/2 \right| = \left| 4x^2\sigma_x^2 \right|$$

Jednoduchý příklad $y = x^2$

Explicitní propagace

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad \rightsquigarrow \qquad y = x^2 \\
J &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = 2x \\
\mathbf{\Sigma}_{y^2} &= \left|\, \sigma_y^2 \,\right| = \left|\, 2x \,\right| \left|\, \sigma_x^2 \,\right| \left|\, 2x \,\right| = \left|\, 4x^2\sigma_x^2 \,\right|
\end{aligned}
$$

Implicitní propagace

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{X},\mathbf{Y}) &\qquad \rightsquigarrow \qquad F(x;y) = (y - x^2)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod} \\
g &= \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - x^2) \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -4x \\
\mathbf{\Sigma}_{yy} &= \left|\, \sigma_y^2 \,\right| = \left|\, 1/2 \,\right| \left|\, -4x \,\right| \left|\, \sigma_x^2 \,\right| \left|\, -4x \,\right| \left|\, 1/2 \,\right| = \left|\, 4x^2\sigma_x^2 \,\right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x^2$

Explicitní propagace

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad \rightsquigarrow \quad y = x^2 \\ J &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = 2x \\ \mathbf{\Sigma}_{y^2} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 2x\ \right| \left|\ \sigma_x^2\ \right| \left|\ 2x\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right| \end{aligned}$$

Implicitní propagace

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad \rightsquigarrow \quad F(x; y) = (y - x^2)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod}$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - x^2) \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -4x \\ \mathbf{\Sigma}_{yy} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 1/2\ \right| \left|\ -4x\ \right| \left|\ \sigma_x^2\ \right| \left|\ -4x\ \right| \left|\ 1/2\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right| \end{aligned}$$

Jednoduchý příklad $y = x^2$

Explicitní propagace

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad \rightsquigarrow \qquad y = x^2 \\
J &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = 2x \\
\mathbf{\Sigma}_{y^2} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 2x\ \right| \left|\ \sigma_x^2\ \right| \left|\ 2x\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Implicitní propagace

$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \qquad \rightsquigarrow \qquad F(x; y) = (y - x^2)^2 \cdots$ minimalizace pro 1 bod

$$
\begin{aligned}
g &= \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - x^2) \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -4x \\
\mathbf{\Sigma}_{yy} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 1/2\ \right| \left|\ -4x\ \right| \left|\ \sigma_x^2\ \right| \left|\ -4x\ \right| \left|\ 1/2\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x^2$

Explicitní propagace

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad \rightsquigarrow \quad y = x^2 \\
J &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = 2x \\
\mathbf{\Sigma}_{y^2} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 2x\ \right| \left|\ \sigma_x^2\ \right| \left|\ 2x\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Implicitní propagace

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) & \quad \rightsquigarrow \quad F(x; y) = (y - x^2)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod} \\
g &= \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - x^2) \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -4x \\
\mathbf{\Sigma}_{yy} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 1/2\ \right| \left|\ -4x\ \right| \left|\ \sigma_x^2\ \right| \left|\ -4x\ \right| \left|\ 1/2\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x^2$

Explicitní propagace

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad \rightsquigarrow \qquad y = x^2 \\
J &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = 2x \\
\mathbf{\Sigma}_{y^2} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 2x\ \right|\left|\ \sigma_x^2\ \right|\left|\ 2x\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Implicitní propagace

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{X},\mathbf{Y}) & \qquad \rightsquigarrow \qquad F(x;y) = (y-x^2)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod} \\
g &= \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-x^2) \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -4x \\
\mathbf{\Sigma}_{yy} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 1/2\ \right|\left|\ -4x\ \right|\left|\ \sigma_x^2\ \right|\left|\ -4x\ \right|\left|\ 1/2\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x^2$

Explicitní propagace

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad \rightsquigarrow \qquad y = x^2 \\
J &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = 2x \\
\mathbf{\Sigma}_{y^2} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 2x\ \right|\left|\ \sigma_x^2\ \right|\left|\ 2x\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Implicitní propagace

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) & \qquad \rightsquigarrow \qquad F(x; y) = (y - x^2)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod} \\
g &= \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - x^2) \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -4x \\
\mathbf{\Sigma}_{yy} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 1/2\ \right|\left|\ -4x\ \right|\left|\ \sigma_x^2\ \right|\left|\ -4x\ \right|\left|\ 1/2\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x^2$

Explicitní propagace

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad \rightsquigarrow \qquad y = x^2\\ J &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = 2x\\ \mathbf{\Sigma}_{y^2} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 2x\ \right|\left|\ \sigma_x^2\ \right|\left|\ 2x\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|\end{aligned}$$

Implicitní propagace

$$\begin{aligned}F(\mathbf{X},\mathbf{Y}) &\qquad \rightsquigarrow \qquad F(x;y) = (y-x^2)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod}\\ g &= \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-x^2)\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -4x\\ \mathbf{\Sigma}_{yy} &= \left|\ \sigma_y^2\ \right| = \left|\ 1/2\ \right|\left|\ -4x\ \right|\left|\ \sigma_x^2\ \right|\left|\ -4x\ \right|\left|\ 1/2\ \right| = \left|\ 4x^2\sigma_x^2\ \right|\end{aligned}$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Explicitní propagace: $q = y - x$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array}\right| \\
\mathbf{\Sigma}_{qq} &= \left|\begin{array}{c} \sigma_q^2 \end{array}\right| = \\
&= \left|\begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right| = \\
&= \left|\begin{array}{cc} -\sigma_x^2 + \sigma_{xy}, & -\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right| = \\
&= \left|\begin{array}{c} +\sigma_x^2 - \sigma_{xy} - \sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{array}\right| = \\
&= \left|\begin{array}{c} \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{array}\right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Explicitní propagace: $q = y - x$

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}_{qq} &= \begin{vmatrix} \sigma_q^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -\sigma_x^2 + \sigma_{xy}, & -\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} +\sigma_x^2 - \sigma_{xy} - \sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Explicitní propagace: $q = y - x$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \\
\mathbf{\Sigma}_{qq} &= \begin{vmatrix} \sigma_q^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -\sigma_x^2 + \sigma_{xy}, & -\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} +\sigma_x^2 - \sigma_{xy} - \sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Explicitní propagace: $q = y - x$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \\
\mathbf{\Sigma}_{qq} &= \begin{vmatrix} \sigma_q^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -\sigma_x^2 + \sigma_{xy}, & -\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} +\sigma_x^2 - \sigma_{xy} - \sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Explicitní propagace: $q = y - x$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \\
\mathbf{\Sigma}_{qq} &= \begin{vmatrix} \sigma_q^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -\sigma_x^2 + \sigma_{xy}, & -\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} +\sigma_x^2 - \sigma_{xy} - \sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Explicitní propagace: $q = y - x$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \\
\mathbf{\Sigma}_{qq} &= \begin{vmatrix} \sigma_q^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -\sigma_x^2 + \sigma_{xy}, & -\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} +\sigma_x^2 - \sigma_{xy} - \sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Explicitní propagace: $q = y - x$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array} \right| \\
\mathbf{\Sigma}_{qq} &= \left| \sigma_q^2 \right| = \\
&= \left| \begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right| = \\
&= \left| \begin{array}{cc} -\sigma_x^2 + \sigma_{xy}, & -\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right| = \\
&= \left| +\sigma_x^2 - \sigma_{xy} - \sigma_{xy} + \sigma_y^2 \right| = \\
&= \left| \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Implicitní propagace: $y = x + q$

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad \rightsquigarrow F(x, y; q) = (y - x - q)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod}$$

$$
\begin{aligned}
g &= \partial F/\partial q = -2(y - x - q) \\
\partial g/\partial q &= 2 \qquad \partial g/\partial x = 2 \qquad \partial g/\partial y = -2 \\
\mathbf{\Sigma}_{qq} &= \left|\ \sigma_q^2\ \right| = \left|\ 2\ \right|^{-1} \left|\ 2, \quad -2\ \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array} \right| \left|\ 2\ \right|^{-1} = \\
&= \left|\ 1, \quad -1\ \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| = \\
&= \left|\ \sigma_x^2 - \sigma_{xy} \quad \sigma_{xy} - \sigma_y^2\ \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| = \\
&= \left|\ \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Implicitní propagace: $y = x + q$

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{X},\mathbf{Y}) & \quad \rightsquigarrow F(x,y;q) = (y-x-q)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod} \\
g &= \partial F/\partial q = -2(y-x-q) \\
\partial g/\partial q &= 2 \qquad \partial g/\partial x = 2 \qquad \partial g/\partial y = -2 \\
\boldsymbol{\Sigma}_{qq} &= \left| \sigma_q^2 \right| = \left| 2 \right|^{-1} \left| 2, \quad -2 \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array} \right| \left| 2 \right|^{-1} = \\
&= \left| 1, \quad -1 \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| = \\
&= \left| \sigma_x^2 - \sigma_{xy} \quad \sigma_{xy} - \sigma_y^2 \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| = \\
&= \left| \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Implicitní propagace: $y = x + q$

$$F(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \quad \rightsquigarrow F(x,y;q) = (y-x-q)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod}$$

$$g = \partial F/\partial q = -2(y-x-q)$$

$$\partial g/\partial q = 2 \qquad \partial g/\partial x = 2 \qquad \partial g/\partial y = -2$$

$$\mathbf{\Sigma}_{qq} = \left| \sigma_q^2 \right| = \left| 2 \right|^{-1} \left| 2, \quad -2 \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array} \right| \left| 2 \right|^{-1} =$$

$$= \left| 1, \quad -1 \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \sigma_x^2 - \sigma_{xy} \quad \sigma_{xy} - \sigma_y^2 \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \right|$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Implicitní propagace: $y = x + q$

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \quad & \rightsquigarrow F(x,y;q) = (y-x-q)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod} \\
g &= \partial F/\partial q = -2(y-x-q) \\
\partial g/\partial q &= 2 \qquad \partial g/\partial x = 2 \qquad \partial g/\partial y = -2 \\
\boldsymbol{\Sigma}_{qq} &= \left|\, \sigma_q^2 \,\right| = \left|\, 2 \,\right|^{-1} \left|\, 2, \;\; -2 \,\right| \left|\begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array}\right| \left|\, 2 \,\right|^{-1} = \\
&= \left|\, 1, \;\; -1 \,\right| \left|\begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right| = \\
&= \left|\, \sigma_x^2 - \sigma_{xy} \quad \sigma_{xy} - \sigma_y^2 \,\right| \left|\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right| = \\
&= \left|\, \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \,\right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Implicitní propagace: $y = x + q$

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{X},\mathbf{Y}) & \quad \leadsto F(x,y;q) = (y-x-q)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod} \\
g &= \partial F/\partial q = -2(y-x-q) \\
\partial g/\partial q &= 2 \qquad \partial g/\partial x = 2 \qquad \partial g/\partial y = -2 \\
\boldsymbol{\Sigma}_{qq} &= \left| \sigma_q^2 \right| = \left| 2 \right|^{-1} \left| 2, \quad -2 \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array} \right| \left| 2 \right|^{-1} = \\
&= \left| 1, \quad -1 \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| = \\
&= \left| \sigma_x^2 - \sigma_{xy} \quad \sigma_{xy} - \sigma_y^2 \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| = \\
&= \left| \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Implicitní propagace: $y = x + q$

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{X},\mathbf{Y}) & \quad \rightsquigarrow F(x,y;q) = (y-x-q)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod} \\
g &= \partial F/\partial q = -2(y-x-q) \\
\partial g/\partial q &= 2 \qquad \partial g/\partial x = 2 \qquad \partial g/\partial y = -2 \\
\boldsymbol{\Sigma}_{qq} &= \left|\ \sigma_q^2\ \right| = \left|\ 2\ \right|^{-1} \left|\ 2, \quad -2\ \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array} \right| \left|\ 2\ \right|^{-1} = \\
&= \left|\ 1, \quad -1\ \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| = \\
&= \left|\ \sigma_x^2 - \sigma_{xy} \quad \sigma_{xy} - \sigma_y^2\ \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| = \\
&= \left|\ \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2\ \right|
\end{aligned}
$$

Jednoduchý příklad $y = x + q$

Implicitní propagace: $y = x + q$

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \quad & \rightsquigarrow F(x,y;q) = (y-x-q)^2 \cdots \text{minimalizace pro 1 bod} \\
g &= \partial F/\partial q = -2(y-x-q) \\
\partial g/\partial q &= 2 \qquad \partial g/\partial x = 2 \qquad \partial g/\partial y = -2 \\
\mathbf{\Sigma}_{qq} &= \left| \sigma_q^2 \right| = \left| 2 \right|^{-1} \left| 2, \quad -2 \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array} \right| \left| 2 \right|^{-1} = \\
&= \left| 1, \quad -1 \right| \left| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| = \\
&= \left| \sigma_x^2 - \sigma_{xy} \quad \sigma_{xy} - \sigma_y^2 \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| = \\
&= \left| \sigma_x^2 - 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \right|
\end{aligned}
$$

Obsah

1. Klasické propagování kovarianční matice
   - Motivace
   - Princip
2. Přímé propagování chyby
   - Princip
   - Variance
   - Min/Max chyba
   - Příklad
3. Propagace kovarianční matice - implicitní forma
   - Definice
   - Příklady
   - Validace algoritmů

Statistická validace algoritmu 1 [Har94]

- Testuje se, zda vypočtené odhady patří do distribuce s danou střední hodnotou a kovarianční maticí.
- Hladina významnosti α.
- Testovaná statistika $\hat{\phi}$.
- Hodnota ϕ_0 zamítnutí hypotézy.
- Postup:
  1. urči správnou odpověd pro ideální případ bez šumu,
  2. pertubuj vstupní data normálním rozložením se nulou střední hodnotou a danou kovarianční maticí,
  3. propaguj analyticky odhady kovarianční matici.

Statistická validace algoritmu 2 [Har94]

- Testovaná hypotéza: zda pozorování $\theta_1, \cdots, \theta_N$ pochází z normálního rozložení se střední hodnotou $\bar{\theta}$ a kovarianční maticí Σ.
- Existuje uniformně nejsilnější test

$$B = \sum_{n=1}^{N} (\theta_n - \bar{\theta})(\theta_n - \bar{\theta})^T$$

Definujme

$$\lambda = (e/N)^{pN/2} |B\Sigma^1|^{N/2} \times \exp(-\frac{1}{2}[tr(B\Sigma_1) + N(\bar{\theta} - \theta)^T \Sigma^1 (\bar{\theta} - \theta)])$$

- Testovaná statistika:

$$T = -2 \log \lambda$$

- T distribuováno podle $\chi^2_{p(p+1)/2+p}$ kde p je dimenze θ
- T_α: $Prob(\chi^2_{p(p+1)/2+p} \geq T_\alpha) = \alpha$

Literatura I

R.M. Haralick.
Propagating covariance in computer vision.
In *12th International Conference on Pattern Recognition (Jerusalem, Israel, 1994)*, volume I, pages 493–498, Washington, DC, 1994. IEEE Computer Society Press.

K. Y. Song, M. Petrou, and J. Kittler.
Texture crack detection.
Machine Vision and Application, 8:63–76, 1995.