Algoritmy a programování

Abstraktní datové struktury

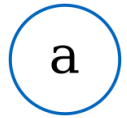
Stromy, binární stromy

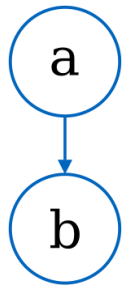
Vojtěch Vonásek

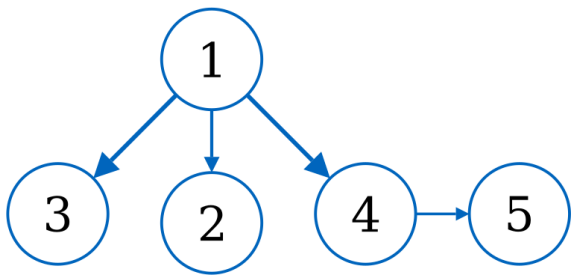
Department of Cybernetics
Faculty of Electrical Engineering
Czech Technical University in Prague

Stromy

- Strom je acyklický a souvislý graf $G = (V, E)$
- Jeden uzel je označen jako kořen
- Každý uzel může mít až $m \geq 0$ potomků
- Každý uzel (kromě kořene) má právě jeden vstup
- Přidáním (jakékoliv) hrany vznikne cyklus
- Odebráním (jakékoliv) hrany přestane být graf souvislý
- List (leaf): uzel, který nemá ani jednoho následovníka (potomka)

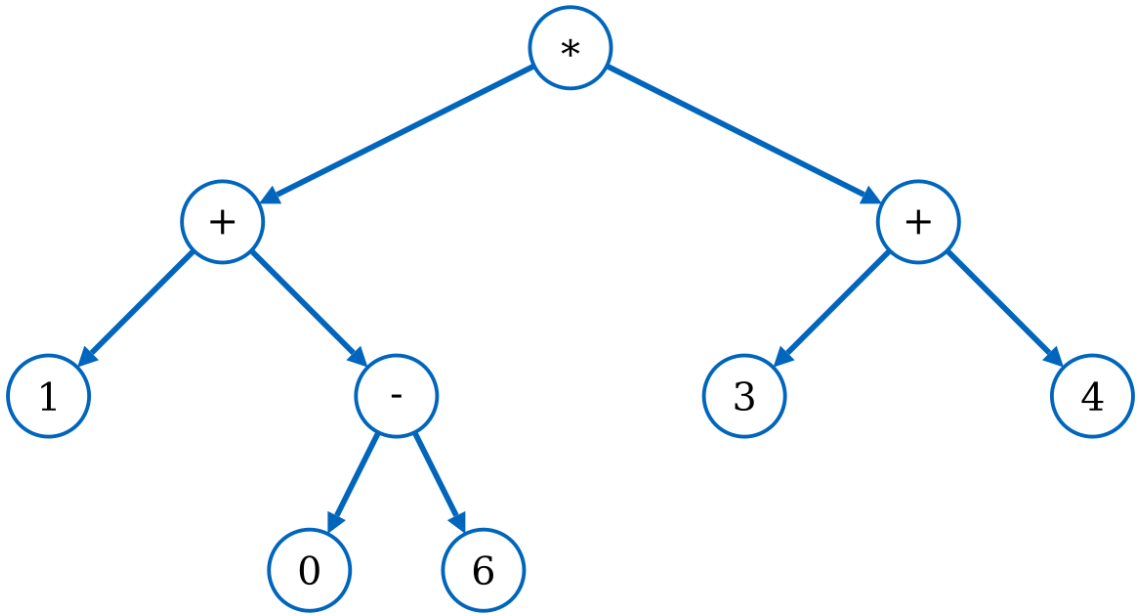






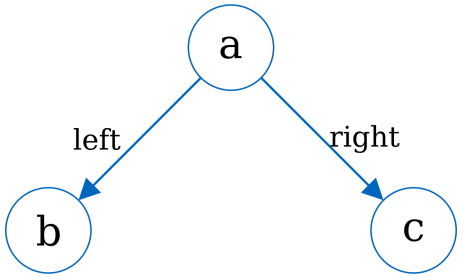
Stromy: příklad použití

- Výraz $(1 + (0 - 6)) * (3 + 4)$ reprezentovaný stromem



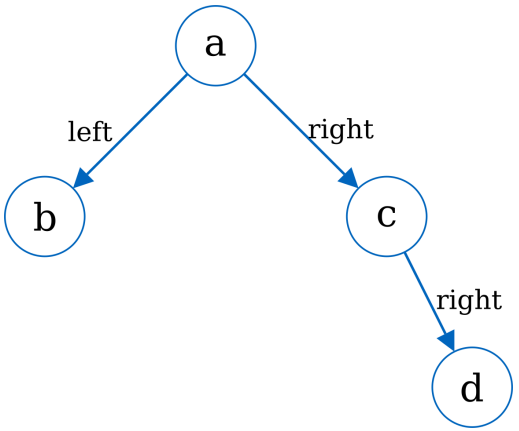
Binární strom

- Souvislý acyklický graf
- Každý uzel má nejvýše dva potomky



Úplný binární strom s n uzly

- každý uzel má 0 nebo 2 potomky
- Počet uzlů v hloubce h je 2^h
- $n = \sum_{i=1}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$
- Všechny listy mají hloubku $h = \log_2(n+1) - 1$
- Počet listů je (n+1)/2, počet vnitřních uzlů je $(n-1)/2$



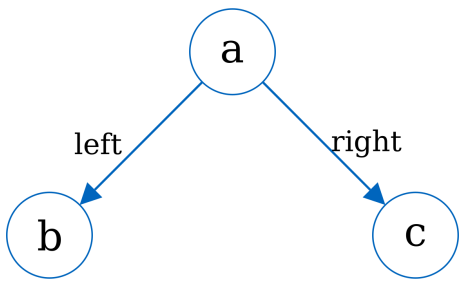
Binární stromy: implementace

- Uzel je objekt, obsahuje data, referenci na levý a pravý podstrom
- Pokud je podstrom prázdný, je reference `None`

```
1 class Node:
2     def __init__(self, data=None, left=None, right=None):
3         self.data = data
4         self.left = left
5         self.right = right
```

```
1 from tree import *
2
3 tree = Node("a", Node("b"), Node("c") )
4 print(tree.data)
5 print(tree.left)
6 print(tree.left.data)
```

```
a
<tree.Node object at 0x7f7376b9df40>
b
```



Binární stromy: procházení

Procházení stromu

- Systematické zpracování každého uzlu stromu
- Zpracování: např. tisk dat, kopírování uzlů, provedení jiné operace podle typu uzlu
- Několik možností pořadí zpracování uzlů

Preorder

- Navštívíme uzel, pak levý podstrom, pak pravý podstrom

Inorder

- Navštívíme levý podstrom, pak uzel, pak pravý podstrom

Postorder

- Navštívíme levý podstrom, pak pravý podstrom, pak uzel

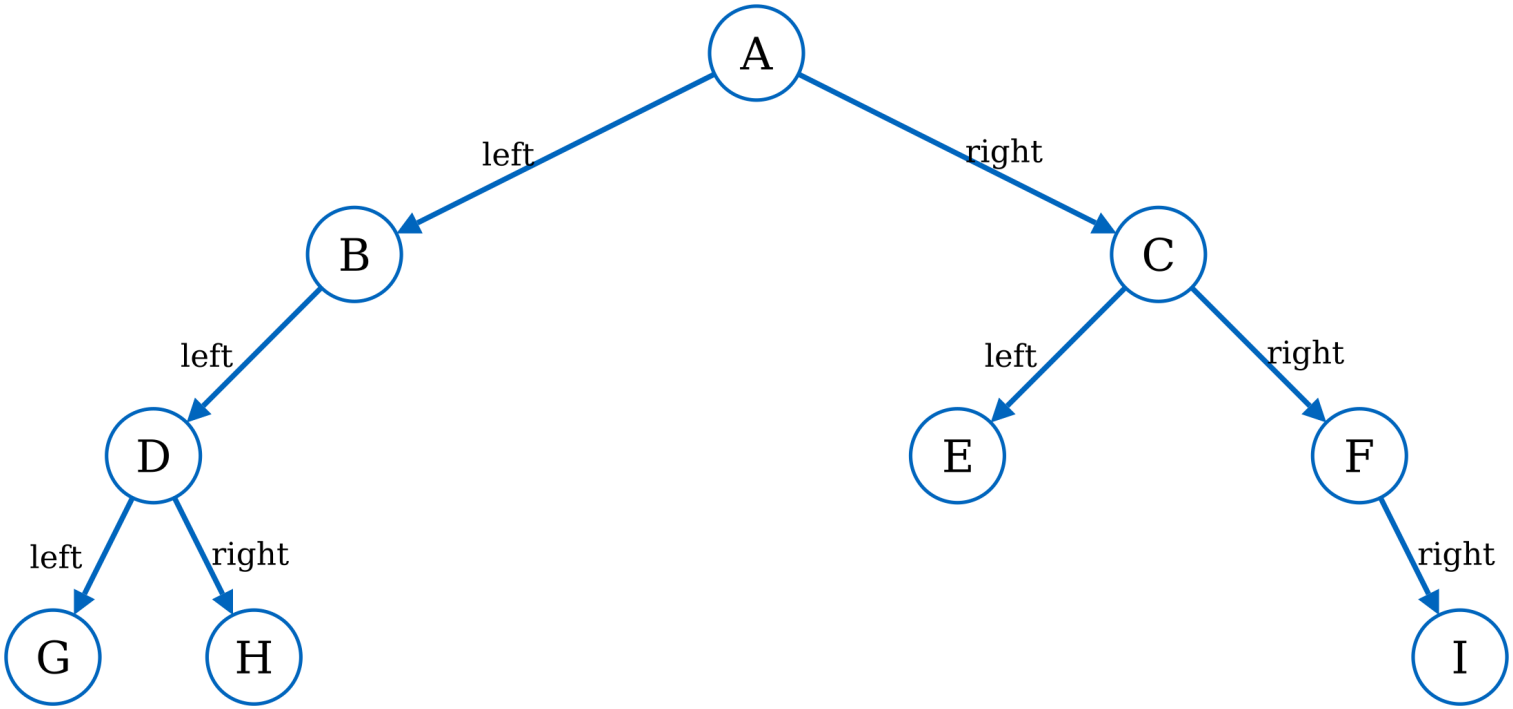
Preorder

- Navštívíme uzel, pak levý podstrom, pak pravý podstrom

```
1 def preorder(node):
2     if node != None:
3         print(node.data)       #visit node
4         preorder(node.left)    #visit left
5         preorder(node.right)   #visit right
```

Preorder

- Navštívíme uzel, pak levý podstrom, pak pravý podstrom
- Uzly jsou navštíveny v pořadí: A B D G H C E F I



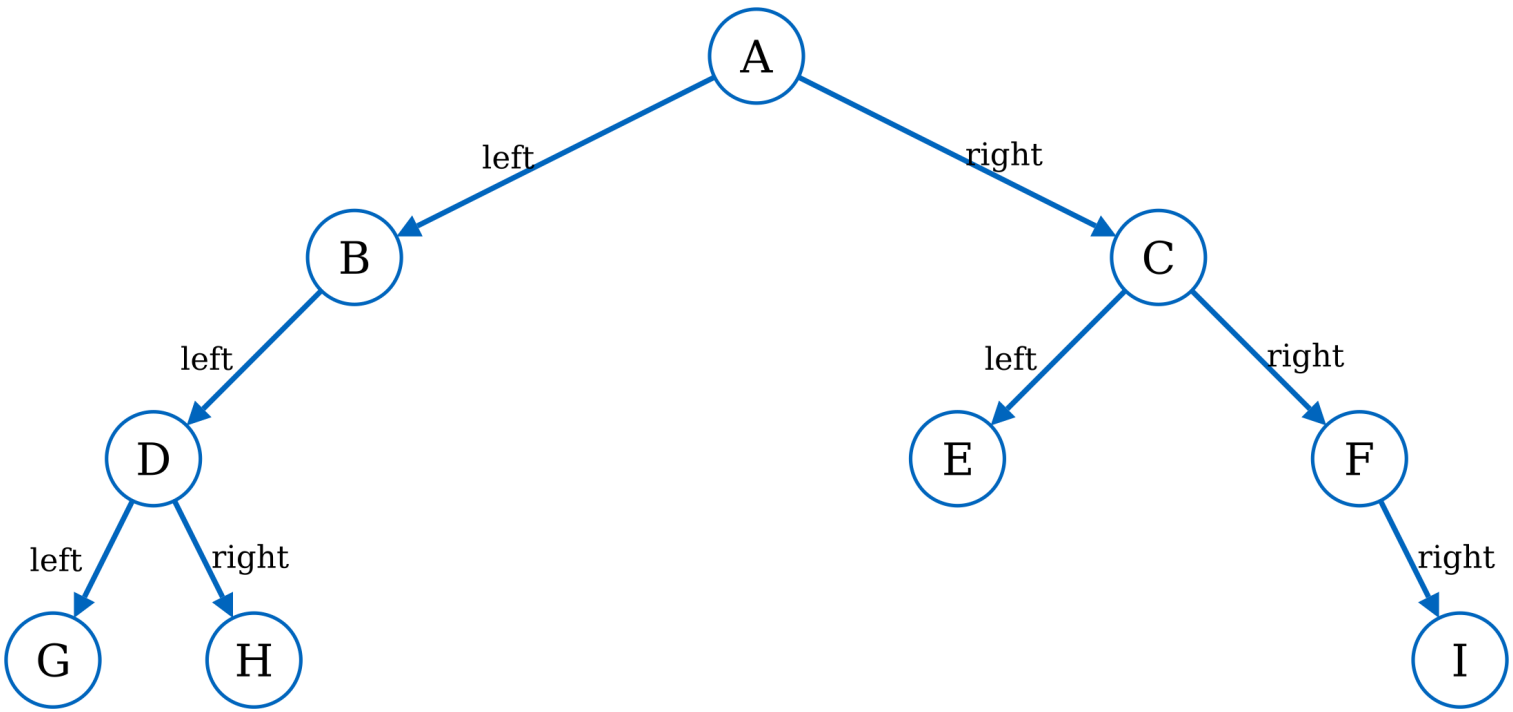
Inorder

- Navštívíme levý podstrom, pak uzel, pak pravý podstrom

```
1 def inorder(node):
2     if node != None:
3         inorder(node.left)  #visit let
4         print(node.data)    #visit node
5         inorder(node.right) #visit right
```

Inorder

- Navštívíme levý podstrom, pak uzel, pak pravý podstrom
- Uzly jsou navštíveny v pořadí: G D H B A E C F I



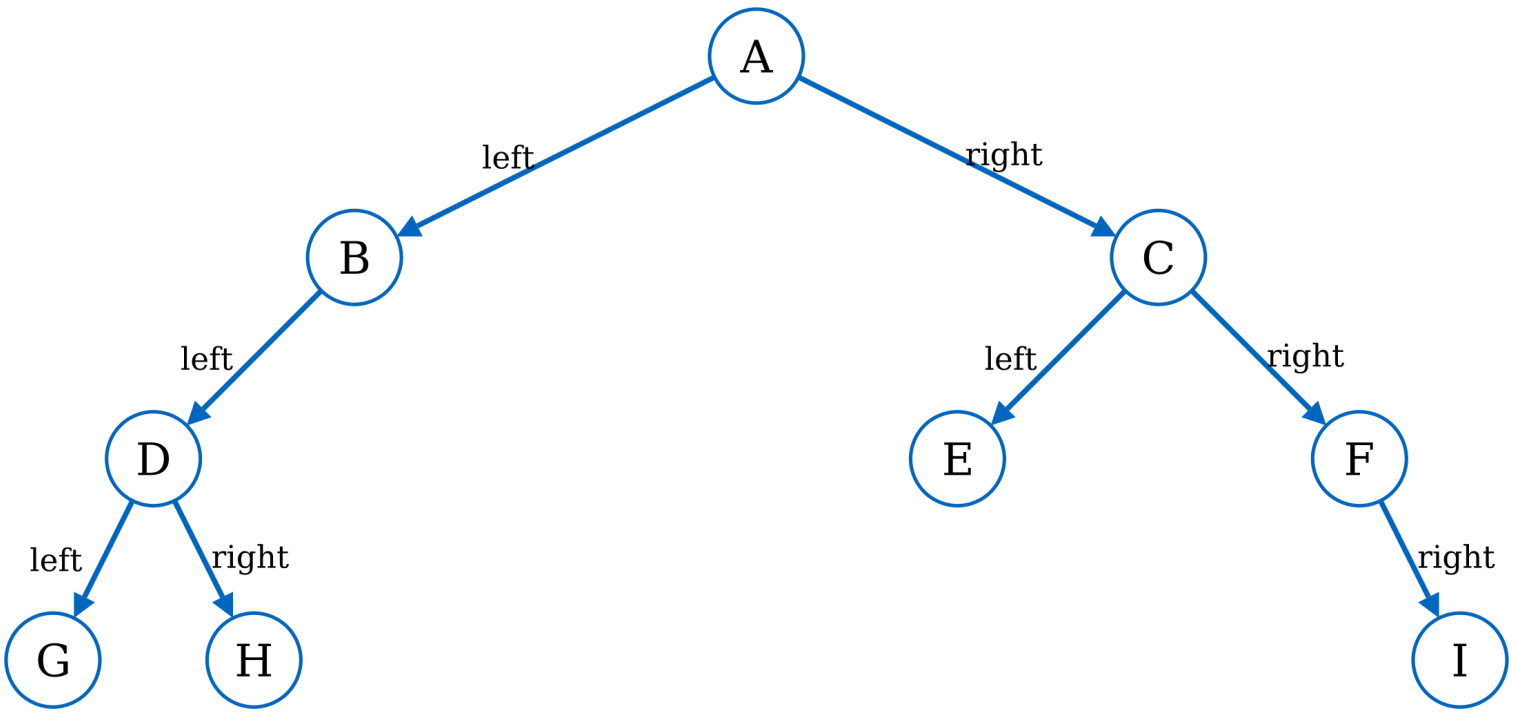
Postorder

- Navštívíme levý podstrom, pak pravý podstrom, pak uzel

```
1 def postorder(node):
2     if node != None:
3         postorder(node.left)  #visit left
4         postorder(node.right) #visit right
5         print(node.data)      #visit node
```

Postorder

- Navštívíme levý podstrom, pak pravý podstrom, pak uzel
- Uzly jsou navštíveny v pořadí: G H D B E I F C A



- Převod datových položek stromu na string

```
1 def preorderString(node):
2     if node != None:
3         return (str(node.data) + "␣"
4             + preorderString(node.left) + "␣"
5             + preorderString(node.right))
6     return ""
```

```
1 def postorderString(node):
2     if node != None:
3         return (postorderString(node.left) + "␣"
4             + postorderString(node.right) + "␣"
5             + str(node.data) )
6     return ""
```

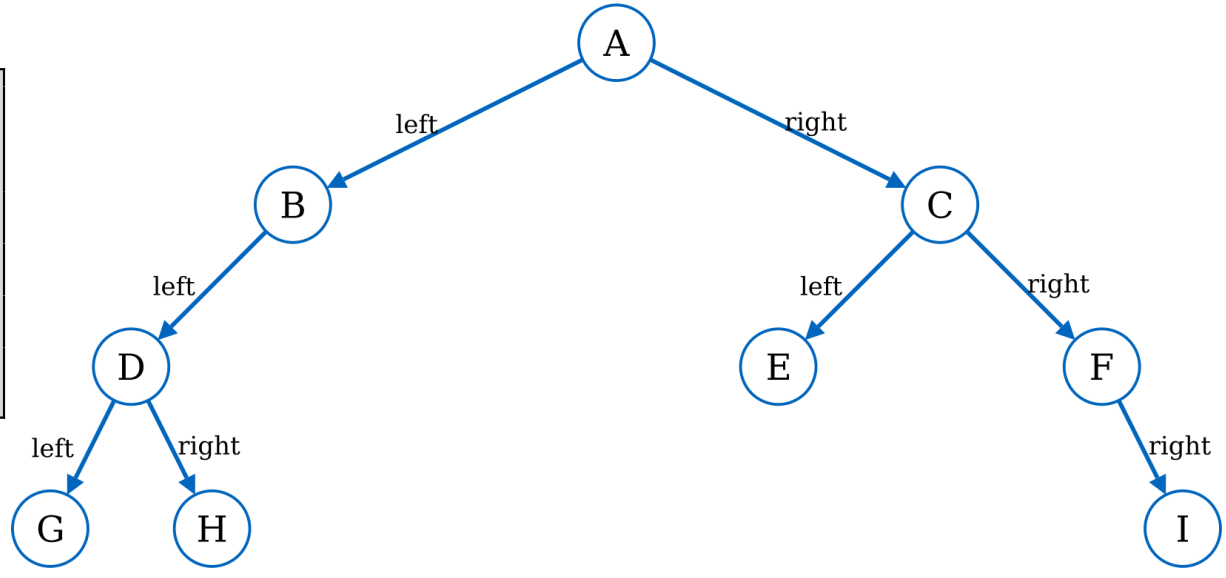
```
1 def inorderString(node):
2     if node != None:
3         return (inorderString(node.left) + "␣"
4             + str(node.data) + "␣"
5             + inorderString(node.right) )
6     return ""
```

Binární stromy

- Převod datových položek stromu na string

```
1  from tree import *
2
3  #create the tree
4  node1 = Node("D", Node("G"), Node("H"))
5  node2 = Node("C", Node("E"), Node("F", None, Node("I")))
6  tree = Node("A", Node("B",node1), node2)
7
8  print("Preorder:", preorderString(tree) )
9  print("Postorder:", postorderString(tree) )
10 print("Inorder:", inorderString(tree) )
```

```
Preorder: A B D G   H
        C E   F   I
Postorder:   G   H D   B
        E     I F C A
Inorder:  G   D   H   B   A
       E   C   F   I
```

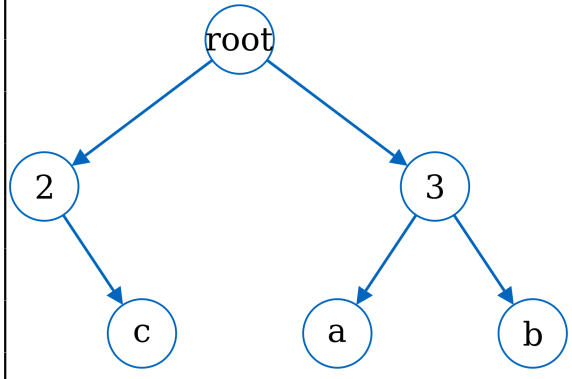


Binární stromy: inorder

- Projdeme strom v `inorder` postupu, navštívené uzly dáváme do pole

```
1  def inorderList(node):
2      if node != None:
3          return inorderList(node.left) + [node] + inorderList(node.
               right)
4      return []
```

```
1  import tree as TREE
2
3  left = TREE.Node(2, None, TREE.Node("c") )
4  right = TREE.Node(3, TREE.Node("a"), TREE.Node
       ("b") )
5  tree = TREE.Node("root", left, right)
6
7  nodes = TREE.inorderList(tree)
8  print("Nodes", nodes)
9  for node in nodes: #node is ref to Node
10     print(node.data, end = "␣")
```

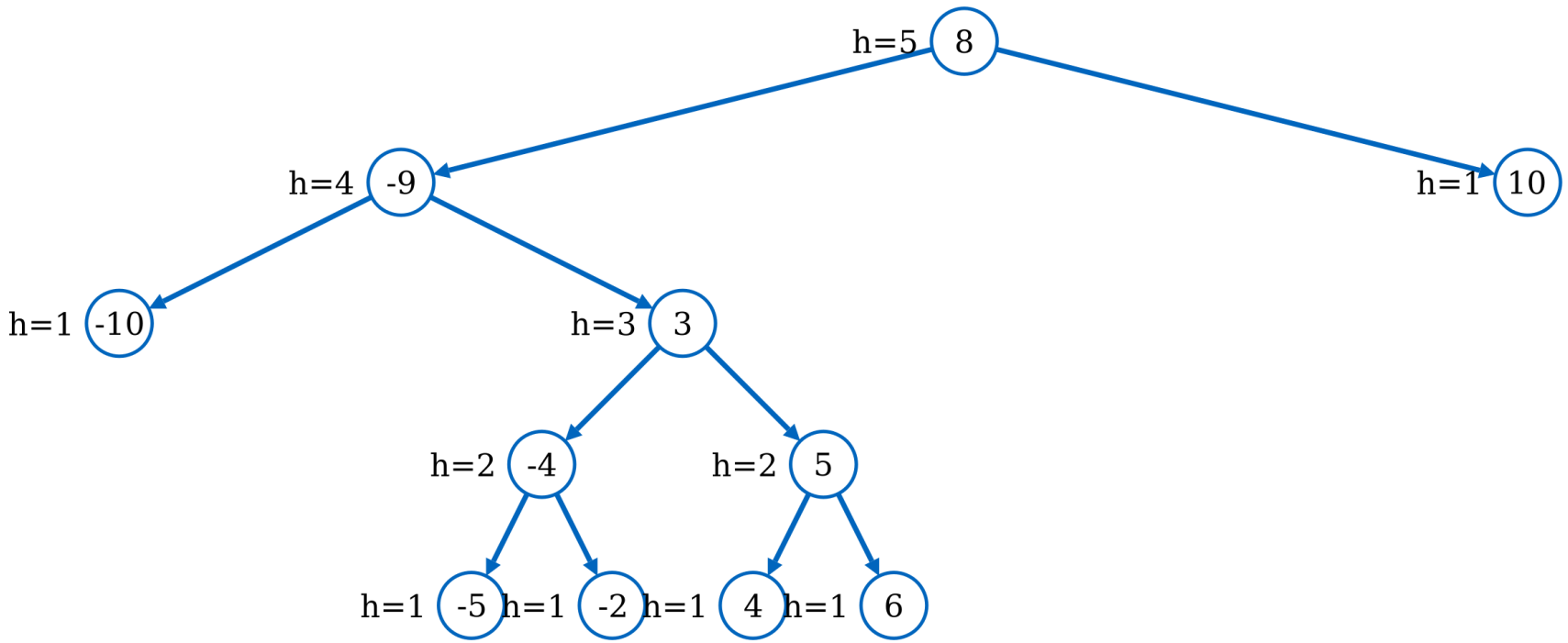



```
Nodes [<tree.Node object at 0x7f1381472e80>, <tree.Node object at 0
    x7f1381558f40>, <tree.Node object at 0x7f138134c610>, <tree.
    Node object at 0x7f13813a5f10>, <tree.Node object at 0
    x7f138137c9d0>, <tree.Node object at 0x7f138137c820>]
2 c root a 3 b
```

Binární stromy: výpočet hloubky v uzlu

- Hloubka v uzlu n je $h(n) = 1 + max(h(n.left), h(n.right))$

```
1 def countDepth(node):
2     if node == None:
3         return 0
4     return 1 + max(countDepth(node.left), countDepth(node.right))
```

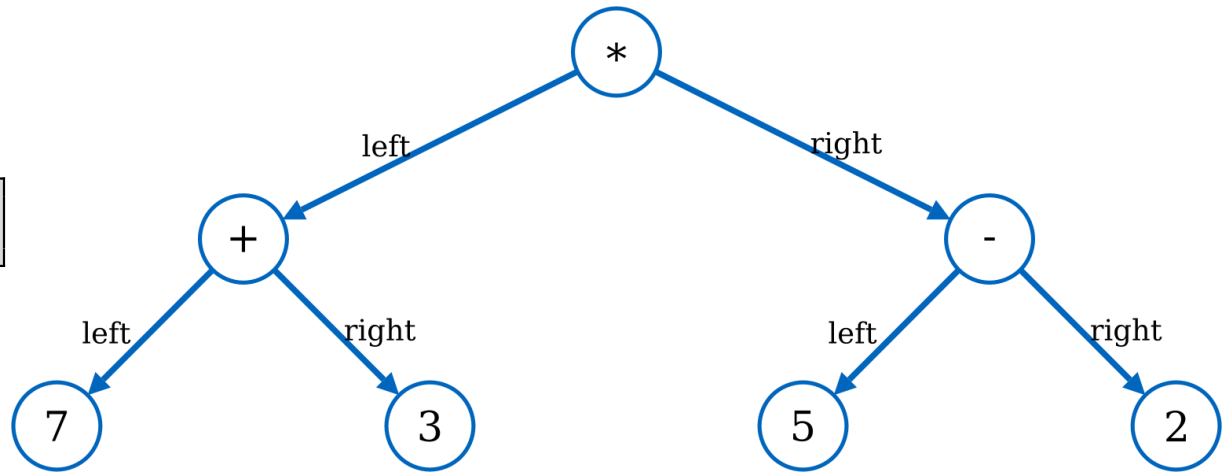


Binární stromy: výrazy

- Reprezentace výrazů: data uzlu obsahují operátor, levý a pravý potomek jsou operandy
- Vyhodnocení výrazů v postorder režimu

```
1 from tree import *
2 nodePlus = Node("+", Node(7), Node(3))
3 nodeMinus = Node("-", Node(5), Node(2) )
4 tree = Node("*", nodePlus, nodeMinus)
5
6 print( postorderString(tree) )
```

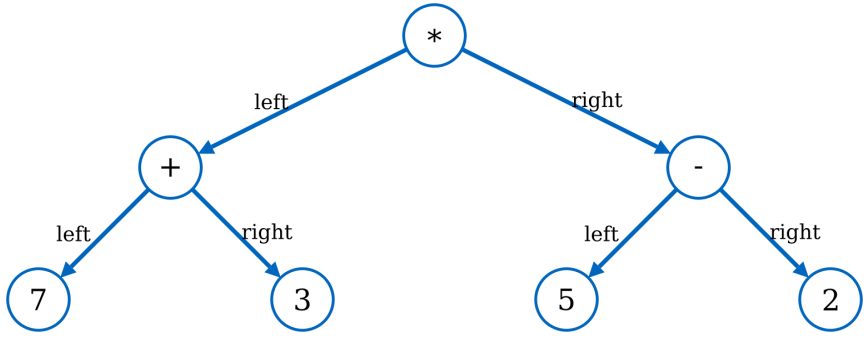
```
7   3 +   5   2 - *
```



Binární stromy: výrazy

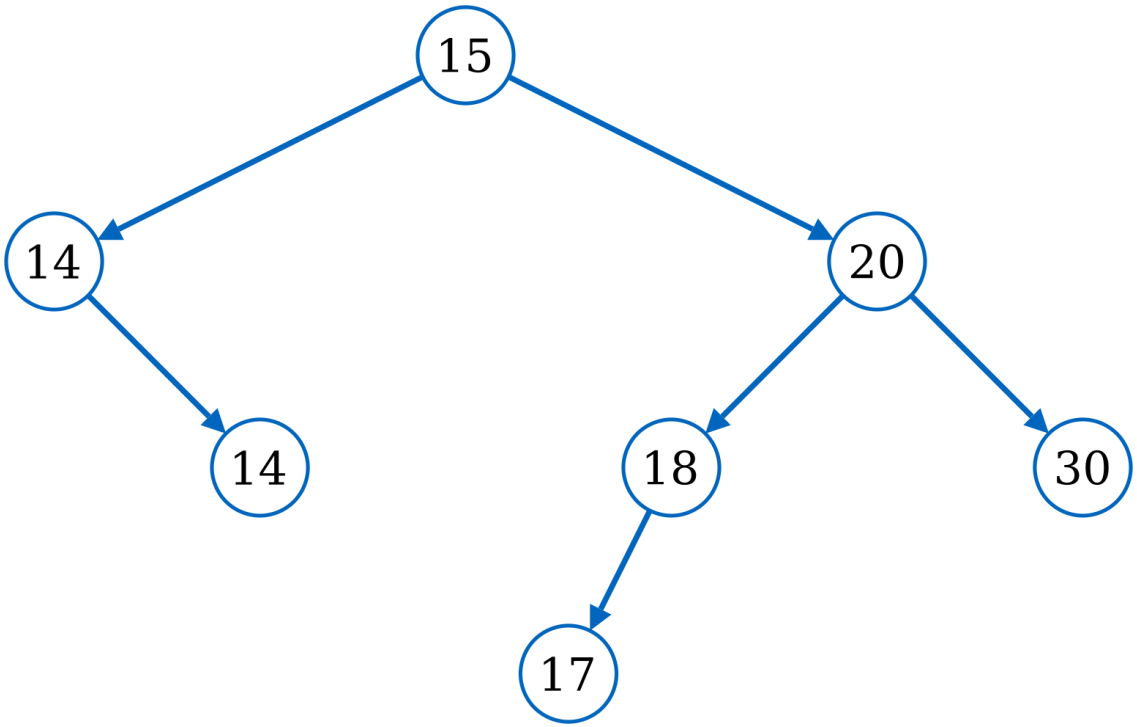

```
1  from tree import *
2  def evaluateTree(node):
3      if node.data=="+":
4          return evaluateTree(node.left) + evaluateTree(node.right)
5      elif node.data=="-":
6          return evaluateTree(node.left) - evaluateTree(node.right)
7      elif node.data=="*":
8          return evaluateTree(node.left) * evaluateTree(node.right)
9      elif node.data == "/":
10         return evaluateTree(node.left) / evaluateTree(node.right)
11     return node.data
12
13 nodePlus = Node("+", Node(7), Node(3))
14 nodeMinus = Node("-", Node(5), Node(2) )
15 tree = Node("*", nodePlus, nodeMinus)
16 print( postorderString(tree) )
17 print( evaluateTree(nodePlus) )
18 print( evaluateTree(tree) )
```

```
  7   3 +   5   2 - *
10
30
```



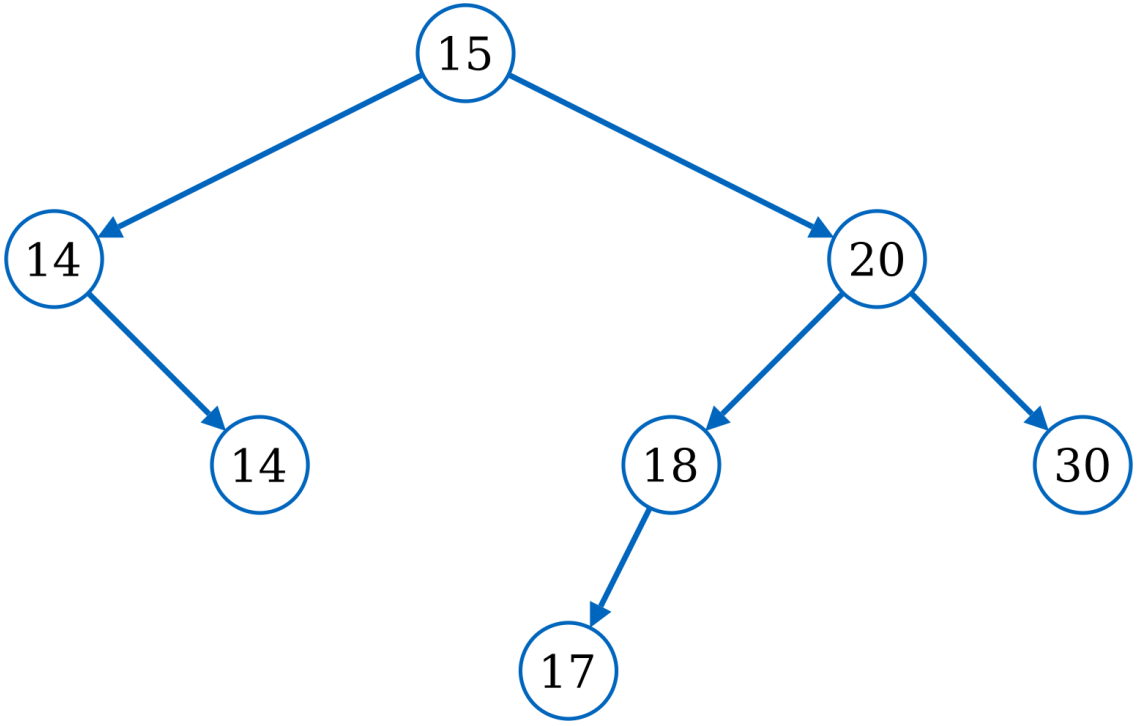
Binární vyhledávací stromy

- Složená datová struktura pro rychlé vyhledávání
- Vyhledávání na základě porovnání (předpokládáme < nebo >)
- Každý uzel obsahuje klíč
- Klíč v každém uzlu je větší nebo roven než klíče ve všech uzlech v levém podstromu
- Klíč v každém uzlu je menší nebo roven než klíče ve všech uzlech v pravém podstromu



Binární vyhledávací stromy: operace

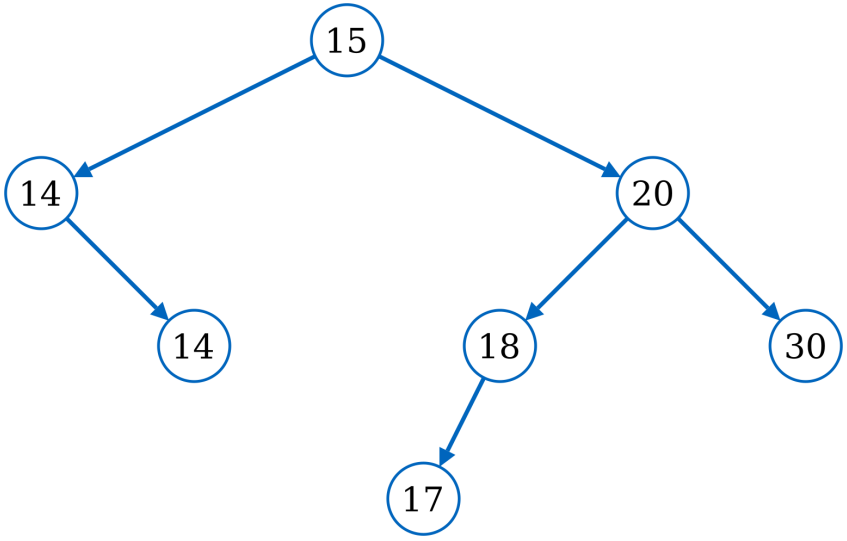
- Vložit prvek
- Smazat prvek
- Vyhledání prvku
  - obsahuje strom hledaný prvek?
  - najít uzel, kde se vyskytuje



Binární vyhledávací stromy: implementace

Základní operace

- Vložit prvek
- Smazat prvek
- Vyhledání prvku
  - obsahuje strom hledaný prvek?
  - najít uzel, kde se vyskytuje




```
1 class BST:
2     def __init__(self, data=None, left=None, right=None):
3         self.data = data
4         self.left = left
5         self.right = right
```

Vytvoření z pole

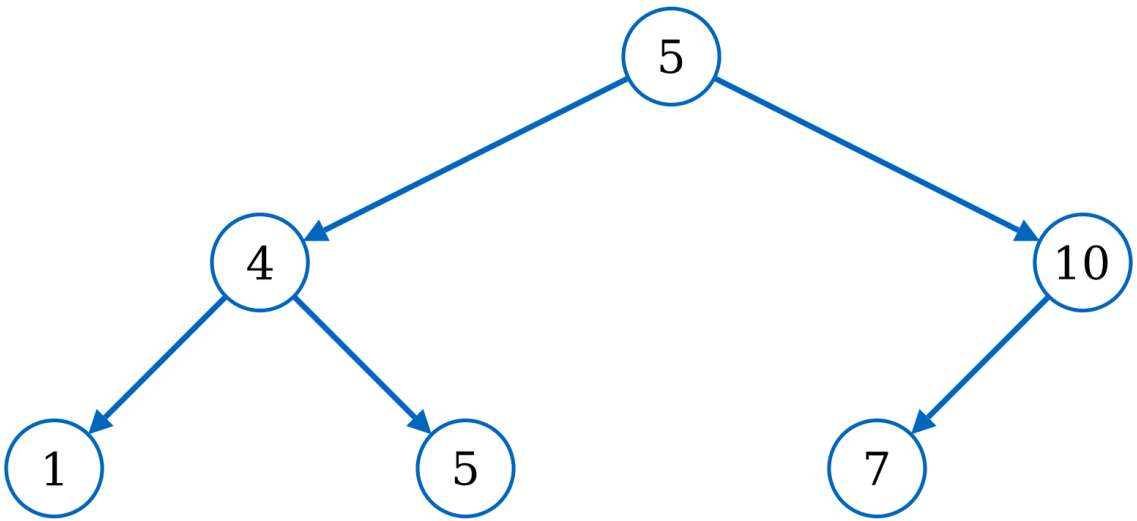
- Setřídíme pole, z prostředního prvku bude uzel, levý a pravý podstrom z levé a pravé poloviny pole
- Rekurzivní postup

```
1  def buildFromArrayInternal(a):
2      if len(a) == 0:
3          return None
4      if len(a) == 1:
5          return BST(a[0])
6      m = len(a) // 2
7      left = buildFromArrayInternal(a[:m])
8      right = buildFromArrayInternal(a[m+1:])
9      return BST(a[m], left, right)
10
11 def buildFromArray(a):
12     tmp = sorted(a)
13     tree = buildFromArrayInternal(tmp)
14     return tree
```

Binární vyhledávací stromy: vytvoření z pole


```
1 from bst import *
2 from tree import preorderString
3 a = [4,1,10,5,5,7]
4 tree = buildFromArray(a)
5 print( preorderString(tree) )
```

```
5 4 1   5   10 7
```



Binární vyhledávací stromy: hledání prvku

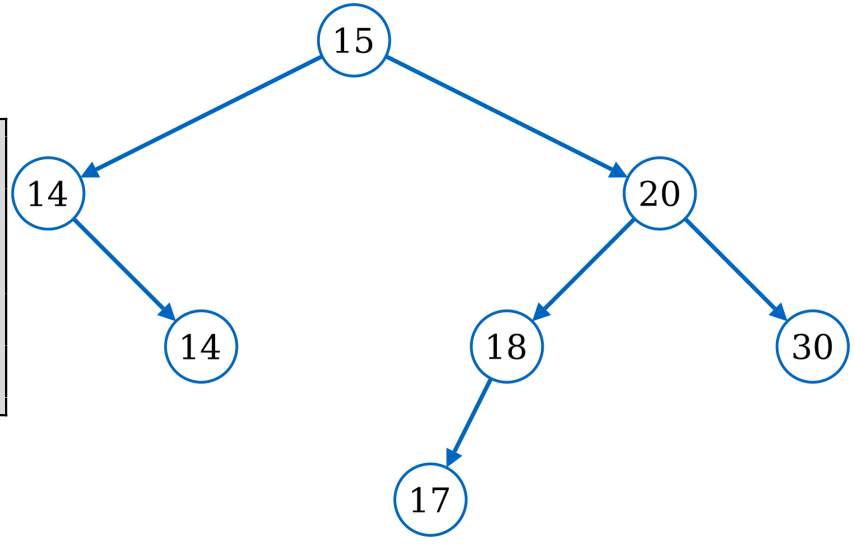
- Pokud uzel obsahuje prvek, vratíme referenci na uzel
- Jinak prohledáme buď levý nebo pravý podstrom
- Složitost: $\mathcal{O}(\log n)$

```
1 def findNode(node, query):
2     if node:
3         if node.data == query:
4             return node
5         if node.data >= query:
6             return findNode(node.left, query)
7         else:
8             return findNode(node.right, query)
9     return None
```

Binární vyhledávací stromy: hledání prvku


```
1  from bst import *
2  from tree import inorderString
3  nodeLeft = BST(14,None,BST(14))
4  nodeRight = BST(20, BST(18, BST(17)), BST(30) )
5  tree = BST(15, nodeLeft, nodeRight)
6
7  print( findNode(tree, 17) )
8  print( containsNode(tree, -18) )
9  print( containsNode(tree, 18) )
10 a = findNode(tree, 20)
11 if a:
12     print("Node␣with␣key␣15:", a.data)
13     print("Subtree␣of␣20␣is:", inorderString(a) )
```

```
<bst.BST object at 0x7f2be1dfe7c0>
False
True
Node with key 15: 20
Subtree of 20 is:  17  18  20  30
```



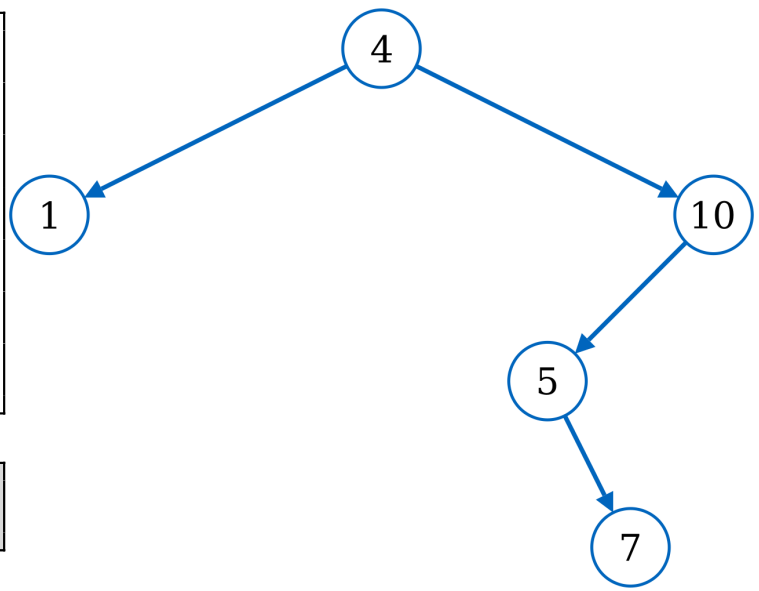
Binární vyhledávací stromy: přidání prvku

- Rekurzivní hledání vhodného místa, kam vložit (dle velikosti klíče)

```
1 def addKey(node, key):
2     if node == None:
3         return BST(key)
4     if key < node.data:
5         node.left = addKey(node.left, key)
6     elif key > node.data:
7         node.right = addKey(node.right, key)
8     return node
```

```
1 import bst as BST
2 import tree as T
3 tree = None
4 for i in [4,1,10,5,5,7]:
5     tree = BST.addKey(tree, i)
6
7 print( T.inorderString(tree) )
```

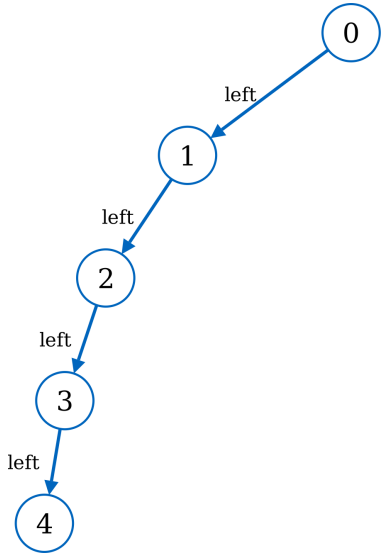
```
 1   4   5   7   10
```



Binární vyhledávací stromy: složitost

Průměrná složitost

- Dokonale vyvážený strom: rozdíl počtu uzlů podstromů se liší nejvýše o jedna
- Hloubka je $h = \log(n)$
- Vkládání, vyhledávání, mazání: $\mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(\log n)$



Nejhorší případ

- Strom je nevyvážený
- Nejhorší případ: degenerovaný strom, hloubka $h = n - 1$
- Vkládání, vyhledávání, mazání: $\mathcal{O}(n)$

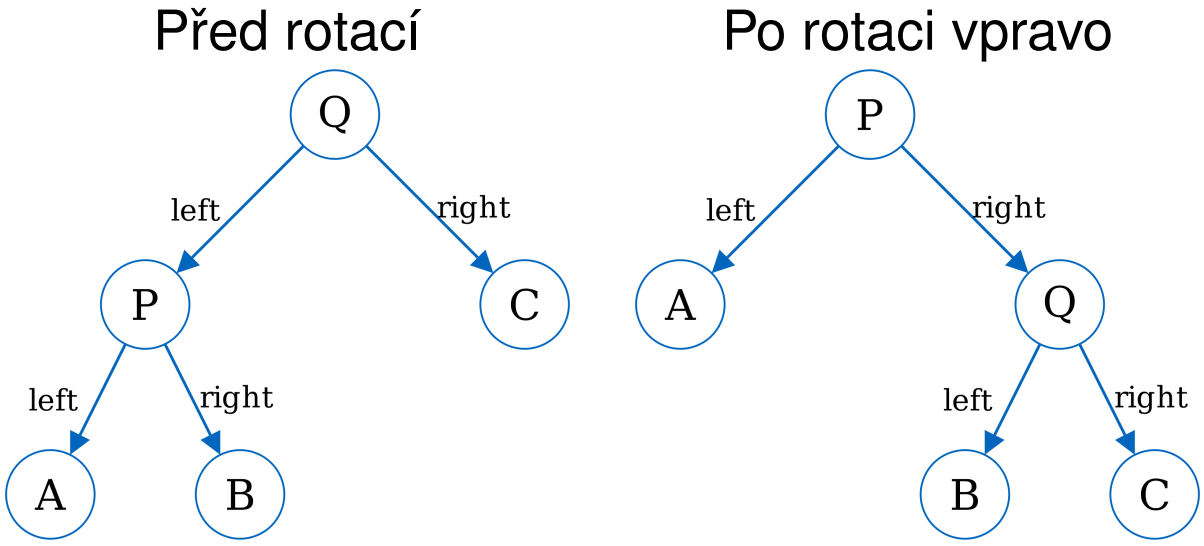
Vyvažování

- Cílem je mít stejnou velikost levého a pravého podstromu (rozdíl max. jedna)
- Operace zápisu do stromu (vkládání a mazání) se upraví o operaci vyvažování
- Poskytují nejlepší složitosti operací vkládání/vyhledání/mazání
- Vyvážené stromy: např. AVL-tree a další

Adelso-Velskii-Landis stromy (AVL-trees)

- Faktor vyvážení $BF(node) = h(node.right) - h(node.left)$
- Pokud je $BF(x) < 0$, je uzel x “left-heavy”, obdobně je right-heavy pokud $BF(x) > 0$
- Operace procházení/vyhledávání jsou stejné jako u BST
- Při vkládání uzlu se rekurzivně updatuje hodnota hloubek od listu ke kořeni
- Pokud $BF(x) \notin \{0, -1, 1\}$, provede se vyvážení v uzlu x a aktualizují se hloubky
- Vyvažovací operace: rotace vlevo/vpravo

Rotace vpravo

- Změna uzlu za jeho levého potomka
- Používá se, pokud je uzel left-heavy

```
1 def rotateLeft(node):
2     pivot = node.left
3     node.left = pivot.right
4     pivot.right = node
5     return pivot
```