Algoritmy a programování

Prioritní fronta, halda

Vojtěch Vonásek

Department of Cybernetics
Faculty of Electrical Engineering
Czech Technical University in Prague

Prioritní fronta (Priority Queue)

- Abstraktní datová struktura
- Obsahuje dopředu neznámý počet prvků
- Prvky jsou vnitřně organizovány dle jejich velikosti
- Základní operace
  - přidání prvku (`insert`, `append`, `push`)
  - odebrání nejmenší položky (`pop`, `top`, `getBest`)
- Další operace
  - zjištění počtu prvků (`size`, `isEmpty`)
  - čtení od začátku (bez změny položek)
  - změna prvku

```
1 q = PQ()
2 q.insert(10); q.insert(-1); q.insert(6)
3 print(q.pop(), q.pop(), q.pop())
```

```
-1 6 10
```

Prioritní fronta

Varianty

- Min-fronta — `pop()` vrací nejmenší prvek
- Max-fronta — `pop()` vrací největší prvek
- Prvky obsahují klíč a hodnotu, vnitřně jsou prvky řazeny dle klíče
- Zásobník a fronta jsou speciálním případem prioritní fronty
  - prvky mají prioritu dle pořadí jejich vložení

Aplikace

- Prioritní fronta je základní ADT pro mnoho algoritmů
  - Hledání k nejmenších (největších) prvků
  - Prioritní rozvrhování a plánování
  - Hledání cest v grafech (např. Dijkstrův algoritmus)
  - Výpočet kostry grafu (Primův algoritmus)
  - Heapsort
  - Huffmanovo kódování
  - Informované prohledávání stavového prostoru — např. best-first search
- Časová složitost $\mathcal{O}()$ uvedená u některých algoritmů předpokládá použití prioritní fronty

Prioritní fronta

- Prioritní frontu lze vnitřně implementovat různými způsoby
- Například naivní imlementace polem `x`:
  - Prvky přidáváme funkcí `x.append()`
  - `pop()` nejdříve najde index nejmenšího prvku i a vrátí `x.pop(i)`
  - `remove(y)` najde index i prvku y, a smaže ho `x.pop(i)`

Implementace prioritní fronty	`insert()` vkládání prvku	`pop()` nalezení maxima	`remove()` odebrání prvku
Pole	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$
Binární strom	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
Binární halda	$\mathcal{O}(\log n)$[1]	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log n)$

- Binární halda je velmi efektivní způsob implementace prioritní fronty

[1] průměrně $\mathcal{O}(1)$ pro n prvků, nejhůře $\mathcal{O}(\log n)$

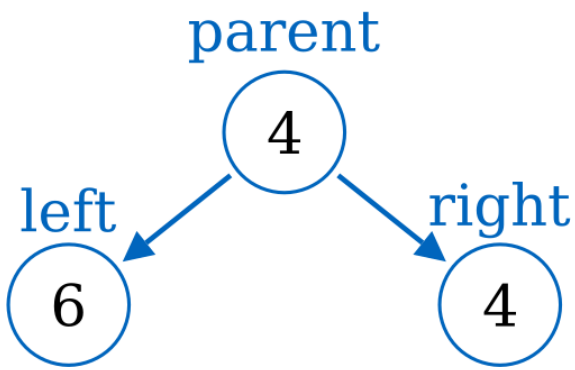
Binární halda

Binární halda (binary heap): binární strom sestavený z prvků

Min-halda

- Kořen stromu obsahuje nejmenší prvek
- Vlastnost min-haldy haldy: uzel není větší než (oba) jeho potomci

$$x[parent] \leq min(x[left], x[right])$$



Max-halda

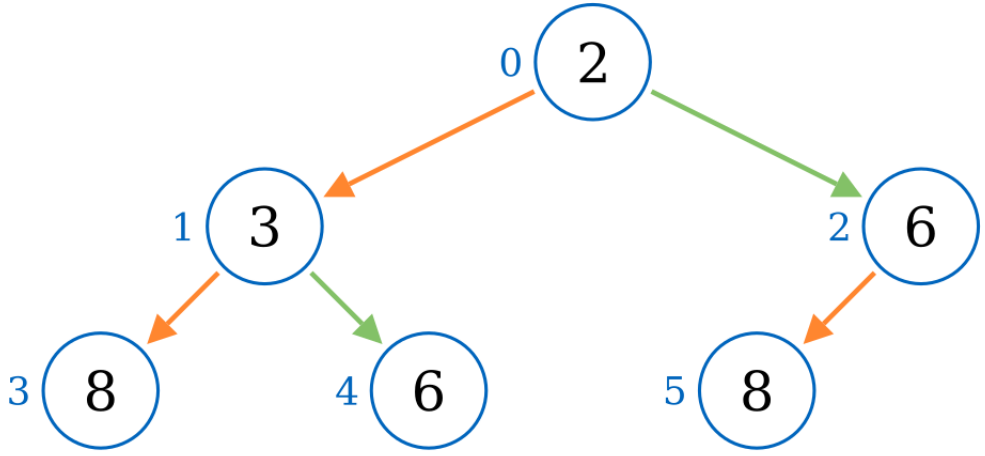
- Obdobně jako min-heap, ale kořen obsahuje největší prvek a vlastnost haldy je

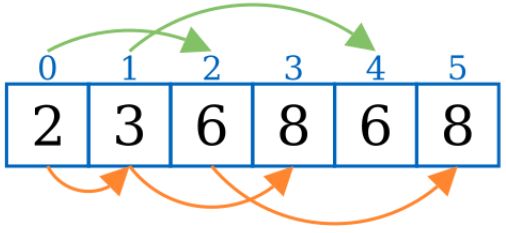
$$x[parent] \geq max(x[left], x[right])$$

Binární halda: implementace

- Binární haldu lze efektivně implementovat v poli
- Pokud P je index rodiče, pak index levého (L) a pravého (R) potomka je:

$$L = 2P + 1 \qquad R = 2P + 2$$



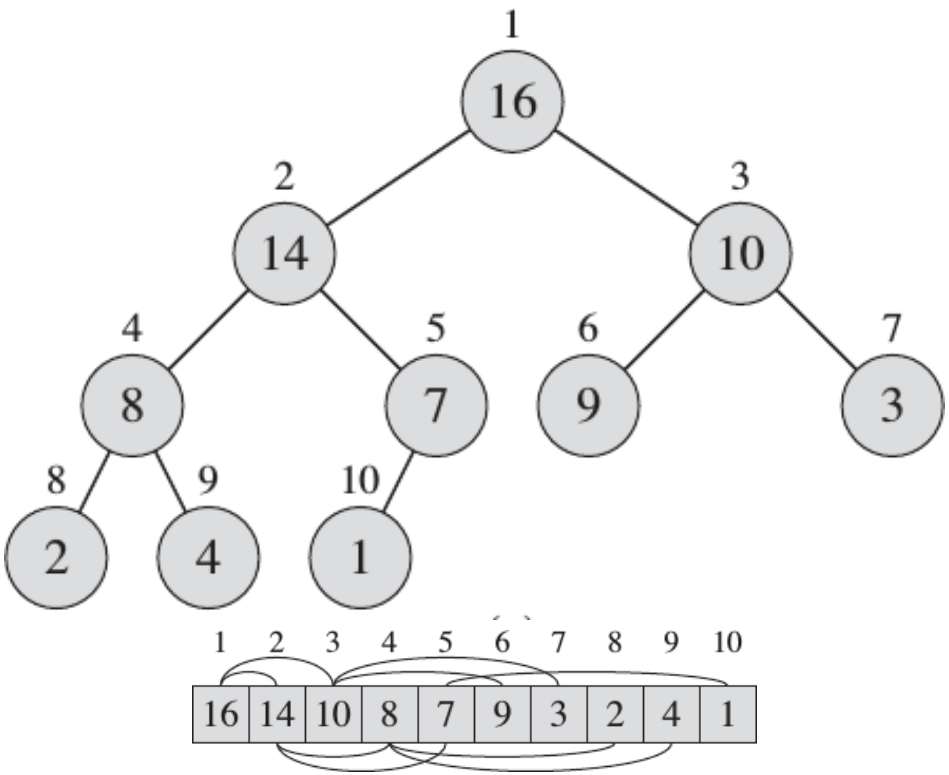


- Výpočet indexu rodiče P na základě indexů levého a pravého potomka

$$P = (L - 1)//2 = (R - 1)//2$$

Poznámka

- Pozor na indexování
- V Pythonu (C/C++, Java . . .) indexujeme pole od **nuly**
- V literatuře se lze setkat s jiným popisem haldy, kde se předpokládá indexování od **jedné**
- V takovém případě je třeba upravit výpočet L, R a P



Binární halda: definice třídy

- Vytvoříme třídu Heap
- Pole pro reprezentaci haldy: `self.heap`
- Hlavní metody:
  - `insert, pop`
- Pomocné metody:
  - `bubbleUp, bubbleDown`

```
1  class MinHeap:
2      def __init__(self):
3          self.heap = []
4
5      def insert(self, item):
6          pass #next slides
7
8      def pop(self):
9          pass #next slides
10
11     def bubbleDown(self, idx):
12         pass #next slides
13
14     def bubbleUp(self, idx):
15         pass #next slides
```

Předpokládané použití

```
1 h = MinHeap()
2 h.insert(1); h.insert(-4); h.insert(10)
3 print(h.top()) #should return -4
4 print(h.top()) #should return 1
5 print(h.top()) #should return 10
```

Binární halda: insert

- Nový prvek vkládáme na konec pole: `self.heap`
- Poté se provede “probublání nahoru”: `self.bubbleUp()`
  - pokud prvek `idx` (a jeho rodič `parent`) porušuje vlastnost haldy, jsou vyměněny
  - probublání pokračuje s rodičem, pak s jeho rodičem . . .

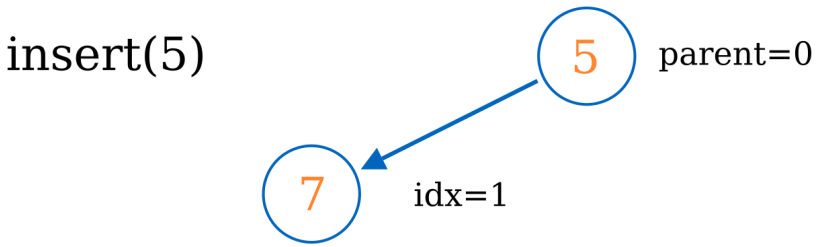
Příklad vkládání prvků: -7, -2, 1, -5

- -7: samotný prvek v haldě, vlastost haldy je splněna

Binární halda: insert

- Nový prvek vkládáme na konec pole: `self.heap`
- Poté se provede “probublání nahoru”: `self.bubbleUp()`
  - pokud prvek `idx` (a jeho rodič `parent`) porušuje vlastnost haldy, jsou vyměněny
  - probublání pokračuje s rodičem, pak s jeho rodičem . . .

Příklad vkládání prvků: -7, -2, 1, -5

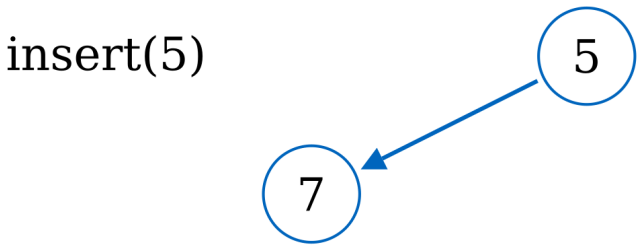


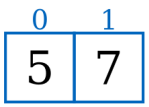
- -2: vlastnost haldy je splněna → není třeba přehazovat prvky

Binární halda: insert

- Nový prvek vkládáme na konec pole: `self.heap`
- Poté se provede “probublání nahoru”: `self.bubbleUp()`
  - pokud prvek `idx` (a jeho rodič `parent`) porušuje vlastnost haldy, jsou vyměněny
  - probublání pokračuje s rodičem, pak s jeho rodičem . . .

Příklad vkládání prvků: -7, -2, 1, -5



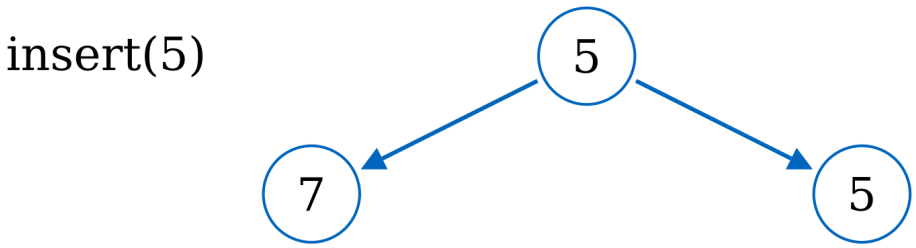


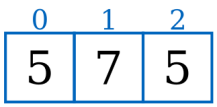
- 1: vlastnost haldy je splněna $\rightarrow$ není třeba přehazovat prvky

Binární halda: insert

- Nový prvek vkládáme na konec pole: `self.heap`
- Poté se provede “probublání nahoru”: `self.bubbleUp()`
  - pokud prvek `idx` (a jeho rodič `parent`) porušuje vlastnost haldy, jsou vyměněny
  - probublání pokračuje s rodičem, pak s jeho rodičem . . .

Příklad vkládání prvků: -7, -2, 1, -5



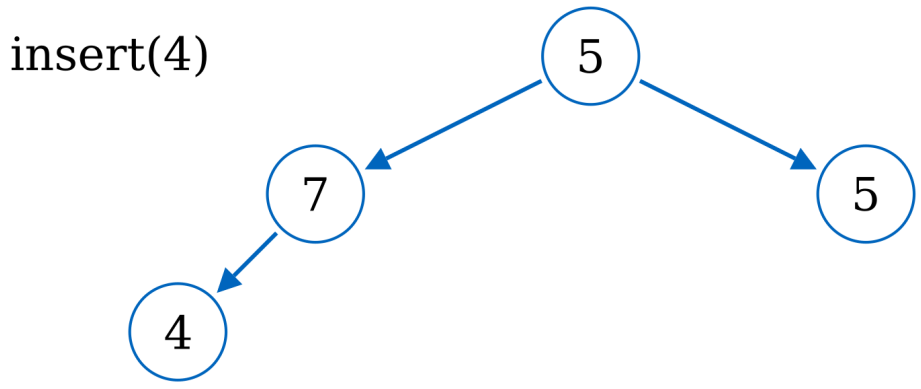


- -5: vlastnost haldy je porušena — rodič je větší než nově vložený prvek

Binární halda: insert

- Nový prvek vkládáme na konec pole: `self.heap`
- Poté se provede “probublání nahoru”: `self.bubbleUp()`
  - pokud prvek `idx` (a jeho rodič `parent`) porušuje vlastnost haldy, jsou vyměněny
  - probublání pokračuje s rodičem, pak s jeho rodičem . . .

Příklad vkládání prvků: -7, -2, 1, -5



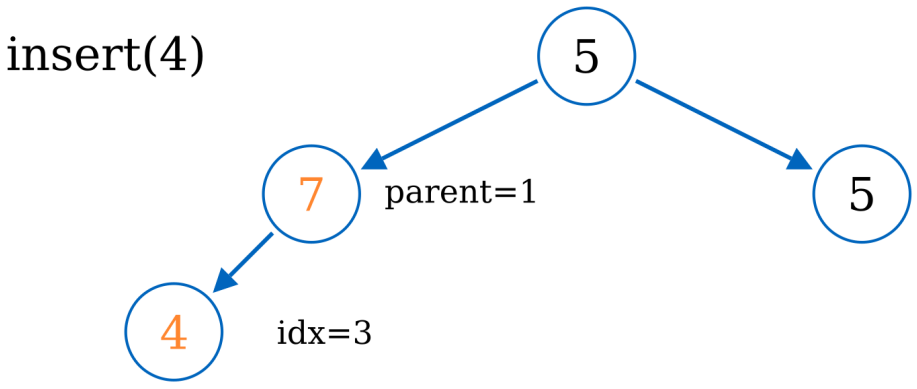
0	1	2	3
5	7	5	4

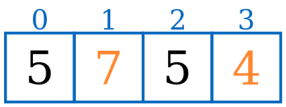
- -5: vlastnost haldy je porušena — rodič a nově vložený prvek vyměníme

Binární halda: insert

- Nový prvek vkládáme na konec pole: `self.heap`
- Poté se provede “probublání nahoru”: `self.bubbleUp()`
  - pokud prvek `idx` (a jeho rodič `parent`) porušuje vlastnost haldy, jsou vyměněny
  - probublání pokračuje s rodičem, pak s jeho rodičem . . .

Příklad vkládání prvků: -7, -2, 1, -5



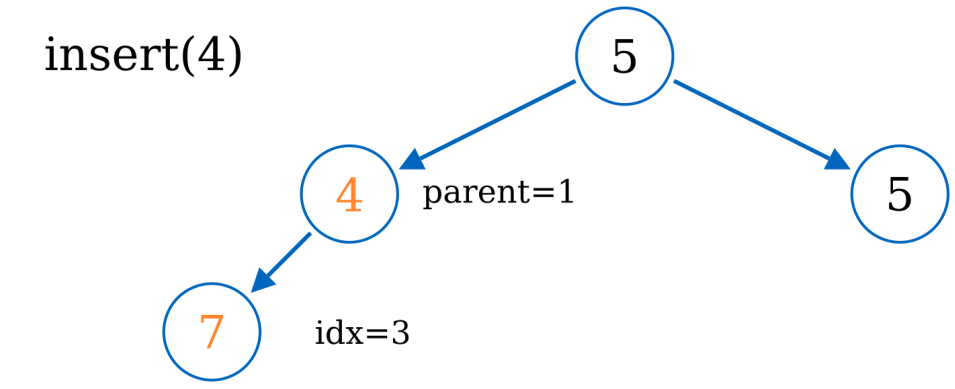


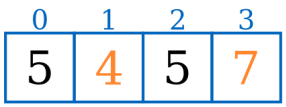
- -5: vlastnost haldy je porušena — rodič a nově vložený prvek vyměníme

Binární halda: insert

- Nový prvek vkládáme na konec pole: `self.heap`
- Poté se provede “probublání nahoru”: `self.bubbleUp()`
  - pokud prvek `idx` (a jeho rodič `parent`) porušuje vlastnost haldy, jsou vyměněny
  - probublání pokračuje s rodičem, pak s jeho rodičem . . .

Příklad vkládání prvků: -7, -2, 1, -5



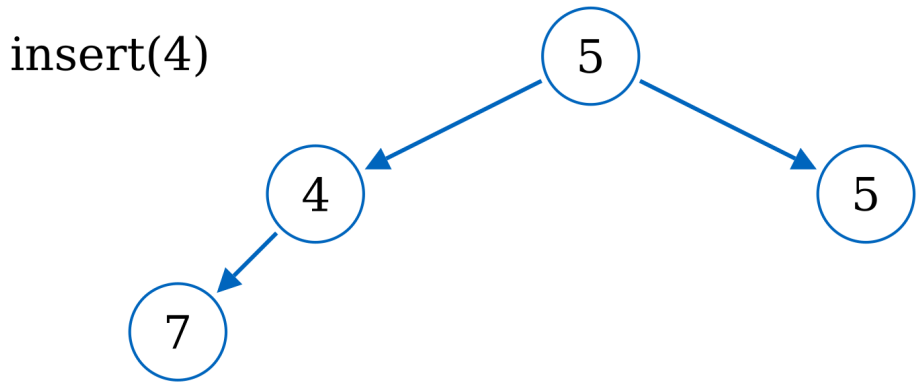


- -5: po výměně je vlastnost haldy splněna

Binární halda: insert

- Nový prvek vkládáme na konec pole: `self.heap`
- Poté se provede “probublání nahoru”: `self.bubbleUp()`
  - pokud prvek `idx` (a jeho rodič `parent`) porušuje vlastnost haldy, jsou vyměněny
  - probublání pokračuje s rodičem, pak s jeho rodičem . . .

Příklad vkládání prvků: -7, -2, 1, -5



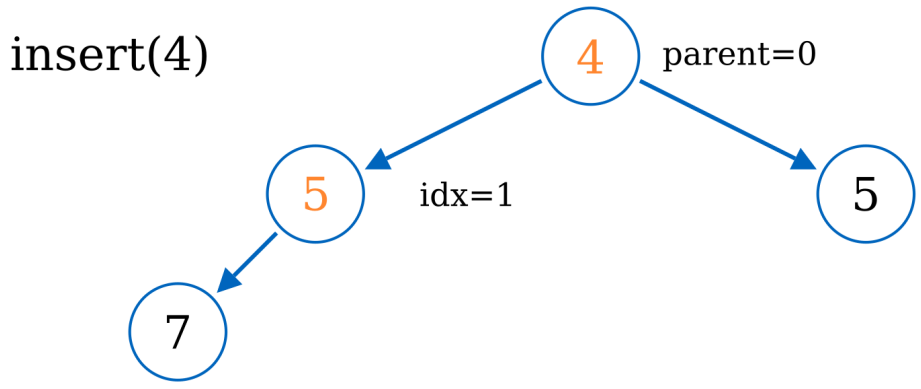
0	1	2	3
5	4	5	7

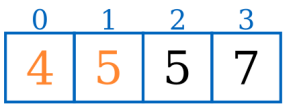
- -5: po výměně je vlastnost haldy splněna

Binární halda: insert

- Nový prvek vkládáme na konec pole: `self.heap`
- Poté se provede “probublání nahoru”: `self.bubbleUp()`
  - pokud prvek `idx` (a jeho rodič `parent`) porušuje vlastnost haldy, jsou vyměněny
  - probublání pokračuje s rodičem, pak s jeho rodičem . . .

Příklad vkládání prvků: -7, -2, 1, -5



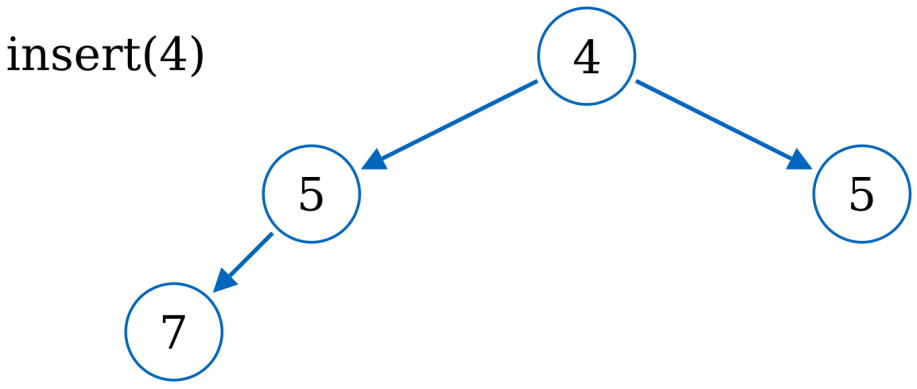


- -5: po výměně je vlastnost haldy splněna

Binární halda: insert

- Nový prvek vkládáme na konec pole: `self.heap`
- Poté se provede “probublání nahoru”: `self.bubbleUp()`
  - pokud prvek `idx` (a jeho rodič `parent`) porušuje vlastnost haldy, jsou vyměněny
  - probublání pokračuje s rodičem, pak s jeho rodičem . . .

Příklad vkládání prvků: -7, -2, 1, -5

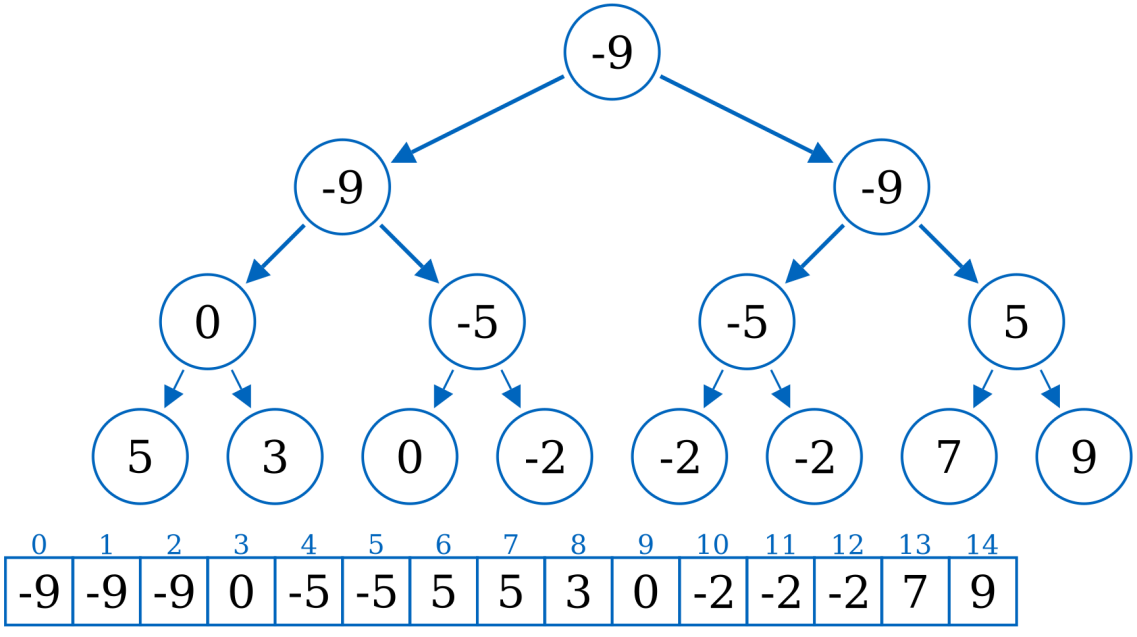


0	1	2	3
4	5	5	7

- -5: po výměně je vlastnost haldy splněna

Binární halda: insert


```
1     def add(self, item):
2         self.heap.append(item)
3         self.bubbleUp(len(self.heap)-1)
4
5     def bubbleUp(self, idx):
6         while idx > 0:
7             parent = (idx -1)//2
8             if self.heap[parent] > self.heap[idx]:
9                 self.heap[parent], self.heap[idx] = self.heap[idx],
                      self.heap[parent]
10            idx = parent
```

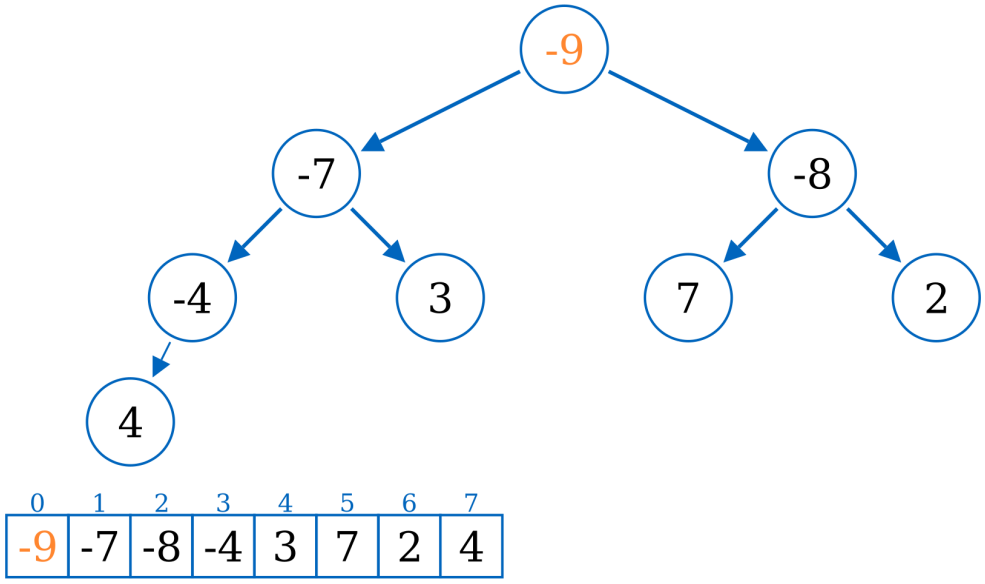


Binární halda: pop

- `pop()`: vrací nejmenší prvek v haldě (min-halda) a **smaže ho**
- Nejmenší prvek na první pozici: `self.heap[0]`
- Poslední prvek se přesune na první prvek a halda se upraví "bubláním dolů" — `bubbleDown()`:
  - pokud je prvek větší než jeden z jeho potomků, tak se s ním vymění
  - výměna probíhá vždy s menším potomkem
  - výměna pokračuje s jeho potomkem atd . . .

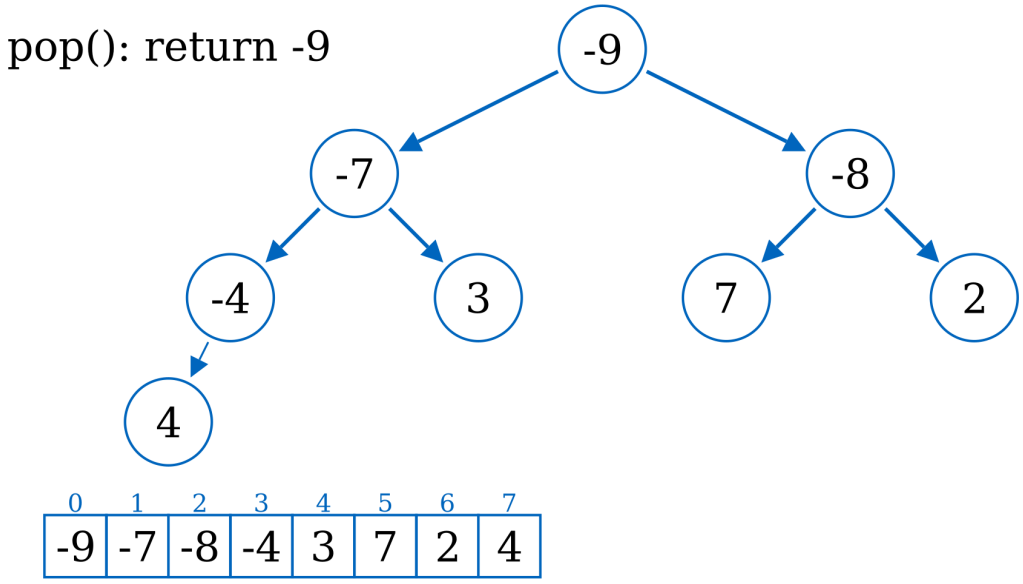
```
1     def pop(self):
2         if len(self.heap) == 0:
3             return None
4         if len(self.heap) == 1:
5             return self.heap.pop()
6
7         v = self.heap[0]
8
9         self.heap[0] = self.heap.pop()
10        self.bubbleDown(0)
11        return v
```

Binární halda: pop



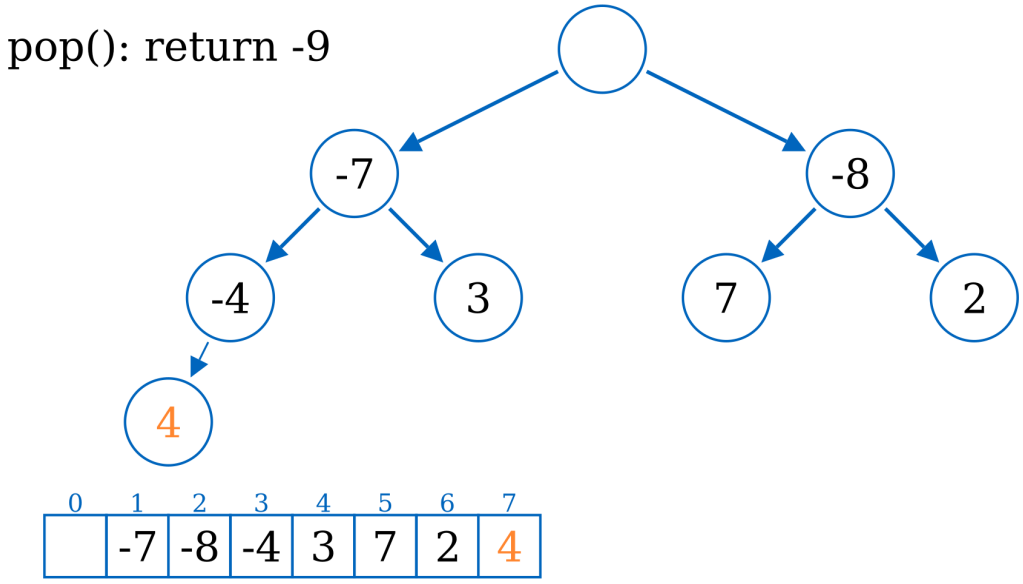
- `pop()` Nejmenší prvek je -9

Binární halda: pop



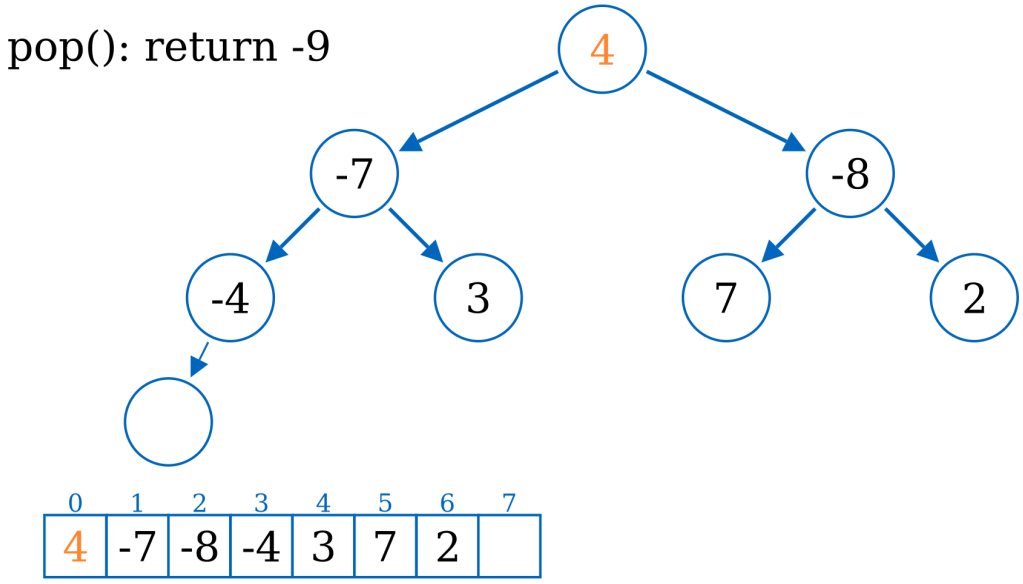
- `pop()` uložíme si ho pro pozdější použití

Binární halda: pop



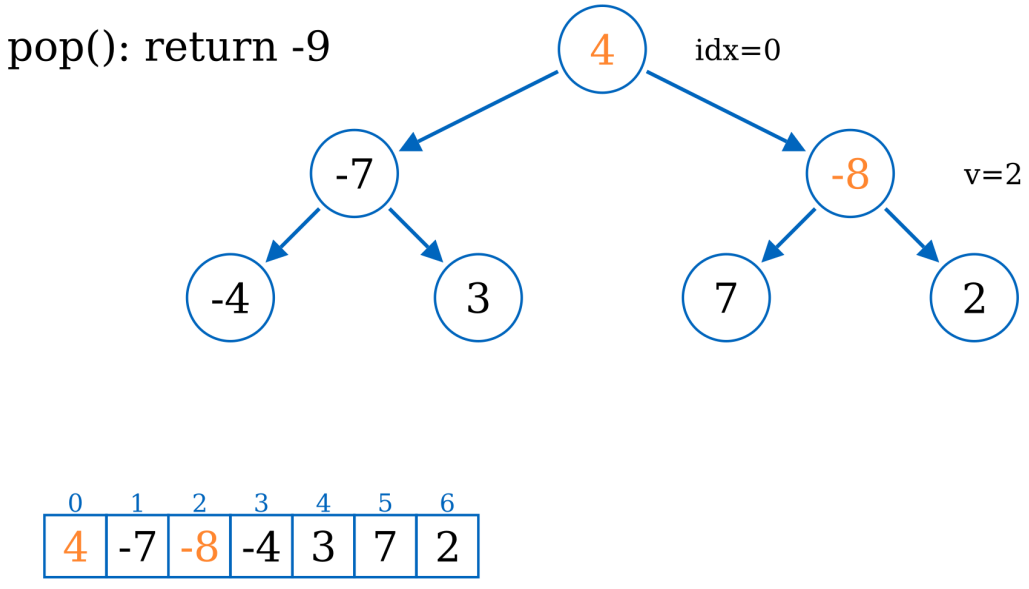
- `pop()` poslední prvek z pole přesuneme na první prvek

Binární halda: pop



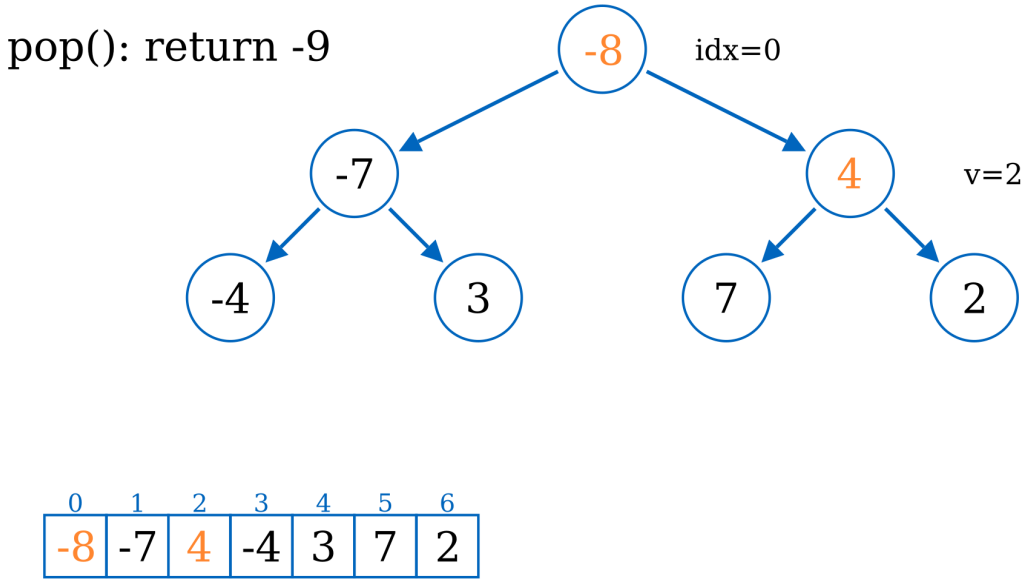
- `pop()` poslední prvek z pole přesuneme na první prvek

Binární halda: pop



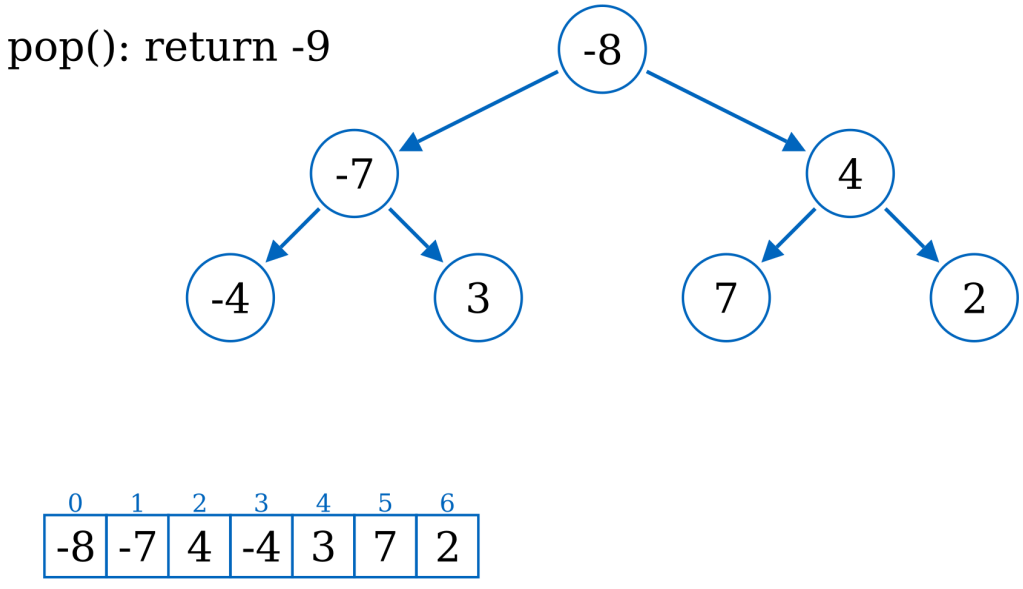
- `pop()` bubbleDown: porovnáme rodiče s nejmenším z potomků

Binární halda: pop



- `pop()` bubbleDown: pokud je rodič větší, vyměníme

Binární halda: pop

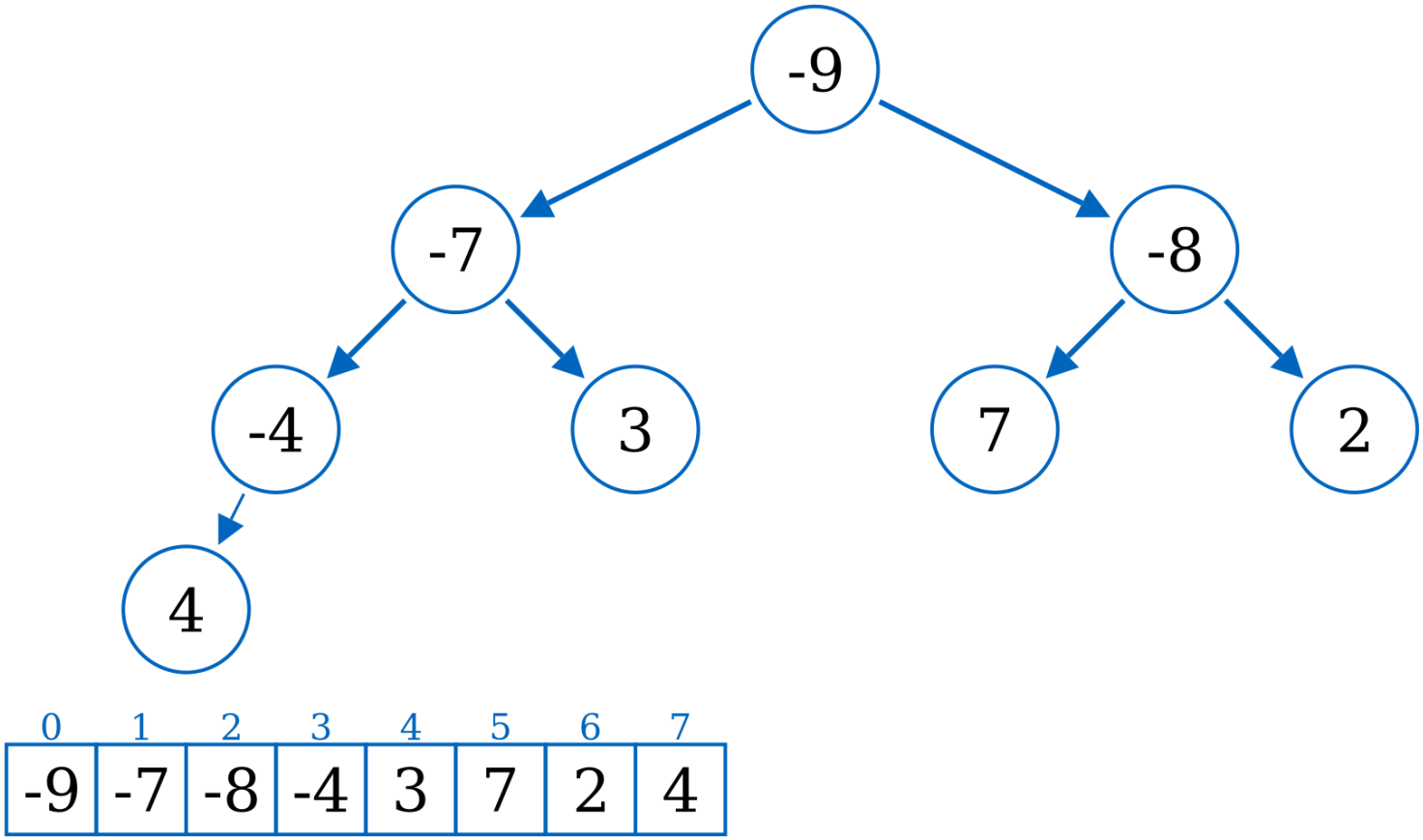


- `pop()` bubbleDown: nyní je splněna podmínka haldy, bubbleDown končí

Binární halda: pop


```
1     def bubbleDown(self, idx):
2         n = len(self.heap)
3         while idx < n:
4             left = 2*idx+1
5             v = idx
6             if left < n and self.heap[left] < self.heap[idx]:
7                 v = left
8             right = 2*idx + 2
9             if right < n and self.heap[right] < self.heap[v]:
10                v = right
11            if v != idx:
12                self.heap[v], self.heap[idx] = self.heap[idx], self
                      .heap[v]
13                idx = v
14            else:
15                break
```

Binární halda: pop



Binární halda: pop


```
1     def pop(self):
2         if len(self.heap) == 0:
3             return None
4         if len(self.heap) == 1:
5             return self.heap.pop()
6
7         v = self.heap[0]
8
9         self.heap[0] = self.heap.pop()
10        self.bubbleDown(0)
11        return v
```

Binární halda: použití


```
1  from minHeap import MinHeap
2
3  a = [ 10, 1,2, -2, -1, 0, 5, 5 ]
4  print(a)
5  h = MinHeap()
6  for item in a:
7      h.add(item)
8
9  while not h.isEmpty():
10     print(h.pop(), end="␣")
```

```
[10, 1, 2, -2, -1, 0, 5, 5]
-2 -1 0 1 2 5 5 10
```

- Třída `MinHeap` je implementována v souboru `minHeap.py`

Binární halda: MaxHeap

- Rozšíření MinHeap na MaxHeap
- Jediná změna je v definici “vlastnosti haldy”, toto se používá v `bubbleUp()` a `bubbleDown()`
- Soubor `maxHeap.py` obsahuje třídu `MaxHeap`

```
1 from maxHeap import MaxHeap
2
3 a = [10,-1,4,0,-5,3,3]
4 h = MaxHeap()
5 for i in a:
6     h.add(i)
7 print(h.heap)
8 while not h.isEmpty():
9     print(h.pop(), end="␣" )
```

```
[10, 0, 4, -1, -5, 3, 3]
10 4 3 3 0 -1 -5
```

Binární halda: vytvoření haldy

- Vytvoření haldy z pole
- Postupným přidáváním prvků `add()`
  - složitost $\mathcal{O}(n \log n)$
- "Heapify"
  - pole lze považovat za haldu s tím, že se opakovaně volá `bubbleDown()`
  - složitost $\mathcal{O}(n)$

Binární halda: heapify

- Heapify mění pole tak, aby splnilo vlastnost haldy

```
1  from minHeap import MinHeap
2  from maxHeap import MaxHeap
3
4  def heapify(a,type=MinHeap):
5      """ in-place create of heap from array a """
6      h=type() #either MinHeap of MaxHeap
7      h.heap=a #put all data in a into heap
8      for i in range((len(a)-1)//2,-1,-1):
9          h.bubbleDown(i)
10     return h
```

```
1  from heapify import heapify
2  from minHeap import MinHeap
3
4  a = [10,-1,2,-4,5,6]
5  h = heapify(a, MinHeap)
6  print(h.heap)
7  while not h.isEmpty():
8      print(h.pop(), end = "␣")
```

```
[-4, -1, 2, 10, 5, 6]
-4 -1 2 5 6 10
```

Řazení s využitím haldy

- Data jsou vložena do haldy
- Opakovaně odebíráme nejmenší prvek, výsledkem jsou setříděná data
- Složitost $\mathcal{O}(n \log n)$

```
1  from minHeap import MinHeap
2
3  a = [10, -1, 0, 0, -4, 14, 2]
4
5  h = MinHeap()
6  for i in a:
7      h.add(i)
8
9  sortedA = []
10 while not h.isEmpty():
11     sortedA.append( h.pop() )
12
13 print(a)
14 print(sortedA)
```

```
[10, -1, 0, 0, -4, 14, 2]
[-4, -1, 0, 0, 2, 10, 14]
```

Heapsort

- In-place třídící algoritmus
- Ze vstupního pole vytvoříme MaxHeap
- Největší prvek je na pozici [0], délka pole je n
- Pro všechna $i = n - 1, n - 2, \ldots, 0$:
  - vyměníme prvek na pozici [0] s prvkem i
  - $n = n - 1$
  - upravíme položky $0, \ldots, n$ tak, aby byla splněna vlastnost haldy, použijeme `bubbleDown()`
- Složitost (nejhorší (!) i průměrná) $\mathcal{O}(n \log n)$
- Není potřeba pomocná paměť
- Řazení není stabilní

Heapsort


```
1  # Algoritmus heapsort
2  # Jan Kybic, 2016
3  def bubble_down(a,i,n):
4      while 2*i+1 < n:
5          j=2*i+1
6          if j+1 < n and a[j] < a[j+1]:
7              j+=1
8          if a[i]<a[j]:
9              a[i],a[j]=a[j],a[i]
10         i=j
11
12 def heapSort(a):
13     """ Setrideni pole na miste """
14     n=len(a)
15     for i in range((n-1)//2,-1,-1):
16         bubble_down(a,i,n)
17     for i in range(n-1,0,-1): # od n-1 do 1
18         a[0],a[i]=a[i],a[0]
19         bubble_down(a,0,i)
20     return a
```

Heapsort


```
1 from heapsort import heapSort
2
3 a = [10,-4,2,2,-1,1,-7]
4 print(a)
5 b = heapSort(a)
6 print(b)
```

```
[10, -4, 2, 2, -1, 1, -7]
[-7, -4, -1, 1, 2, 2, 10]
```

Heapq: python modul

- Python (základní knihovna) obsahuje modul `heapq`
- Soubor funkcí pro práci s haldou, která je uložena v poli
- `heappush(h,x)`: přidá prvek x do haldy
- `heappop(h)`: odebere prvek z haldy
- `heapify(h)`: vytvoří haldu z pole h

```
1  import heapq
2
3  a = [10,4,2,-5,5,11]
4
5  h = [] #our heap
6  for item in a:
7      heapq.heappush(h, item)
8
9  print(h)
10
11 for i in range(len(h)):
12     print(heapq.heappop(h), end="␣")
```

```
[-5, 2, 4, 10, 5, 11]
-5 2 4 5 10 11
```

Radix sort

- Rychlé třídění řetězců nebo celých čísel pevné délky
- Pro každou číslici vytvoříme přihrádku
- Opakujeme od nejméně významného řádu i
  - Každý prvek přidáme do přihrádky podle číslice i
  - Obsah přihrádek zřetězíme v pořadí dle hodnoty číslic
- Out-of-place řazení[2]
- Složitost $\mathcal{O}(d \cdot n)$ pro n dat s délkou klíče d
  - např. řazení sto tříciferních čísel: $n = 100$, $d = 3$
  - např. řazení studentů ALP dle jejich login name: $n =$ počet studentů, $d = 8$

[2] Lze mít i in-place implementaci, ale je složitější

Radix sort

- Pomocné funkce: určení *i*-té číslice, a celkového počtu číslic

```
1 def numDigits(n):
2     num = 1
3     while n > 10:
4         n = n//10
5         num+=1
6     return num
7
8 def digit(a,n):
9     return (a//(10**n)) % 10
```

```
[123, 23, 2, 5, 0, 0, 1, 100]
[0, 0, 1, 2, 5, 23, 100, 123]
```

Radix sort


```
1  def radixSortIntegers(a): #a is array of positive ints
2      maxDigits = numDigits(max(a))
3      p = []
4      for i in range(maxDigits): #sort by i-th digit
5          a = sortByDigit(a, i)
6      return a
7
8  def sortByDigit(a,i):
9      p = [ [] for _ in range(10) ] #buckets for digits 0..9
10     for value in a:
11         c = digit(value,i)
12         p[c].append(value)  #put value in c-th bucket
13     result = []
14     for i in range(len(p)):
15         result += p[i]  #p[i] is array
16     return result
17
18 a = [123,23,2, 5,0,0,1,100]
19 print(a)
20 b = radixSortIntegers(a)
21 print(b)
```

```
[123, 23, 2, 5, 0, 0, 1, 100]
[0, 0, 1, 2, 5, 23, 100, 123]
```