Algoritmy a programování

Složitost algoritmů

Vojtěch Vonásek

Department of Cybernetics
Faculty of Electrical Engineering
Czech Technical University in Prague

Rychlost programů a algoritmů

- Určení náročnosti výpočtů
  - pro výběr vhodné implementace, knihovny, algoritmu
  - pro výběr vhodného HW
  - v optimalizaci programů
- Časová a paměťová náročnost (složitost)
- Náročnost **programu** (implementace) vs. náročnost **algoritmu**
- Analýza programu (implementace)
  - ovlivněna jazykem, HW, zátěží OS, ...
  - teoretická analýza + empirické měření
  - typicky měřeno jako "čas výpočtu"
- Analýza algoritmu
  - teoretická analýza "big-O" notace
  - nezávisí na použitém jazyce
  - typicky analýza počtu "zajímavých" operací

Rychlost programu (implementace)

- Rychlost programu je dále ovlivněna programovacím jazykem, způsobem kompilace . . .
- A samozřejmě typem algoritmu, který program realizuje
- Reálný čas: doba vykonání programu/jeho části
  - Rozdíl mezi časem spuštění a ukončení testovaného programu
  - Závisí na rychlosti PC, operačním systému, velikosti RAM, cache. . .
  - Závisí na aktuálním zatížení PC, případně i na vytížení periferií
- CPU čas: čas strávený na CPU
  - Nižší než reálný čas
  - Závislost na PC, operačním systému, . . .
  - Nezávisí na aktuálním vytížení
  - Složitější měření

Empirické měření rychlosti programu

- Ukážeme si špatné a dobré měření
- Máme dvě verze (liší se použitím knihovny numpy)
- `program1.py`

```
1 import insertionSort as IS
2 import random, time
3
4 a = [ random.random() for _ in range(1000) ]
5 IS.insertionSort(a)
```

- `program2.py`

```
1 import insertionSort as IS
2 import random, time
3 import numpy
4 a = [ random.random() for _ in range(1000) ]
5 IS.insertionSort(a)
```

Empirické měření: nevhodně

- Běh programu změříme na příkazové řádce jako **reálný čas** běhu

```
> time python3 program1.py
```

```
real    0m0,076s
user    0m0,067s
sys     0m0,009s
```

- Pro další rozhodování budeme používat čas ‘real’
- Stejný způsob měření můžeme dosáhnout i v Pythonu

```
1 import time
2 a = [-i for i in range(10000) ]
3 t1 = time.time()
4 b = a.sort()  #merena operace
5 t2 = time.time()
6 print(t2-t1)  #real-time
```

Empirické měření: nevhodně

- Výsledky měření:

  > `time python3 program1.py`: real je 1.23s

  > `time python3 program2.py`: real je 1.21s

- Můžeme provést závěr, že `program2.py` je rychlejší, než `program1.py` ?
- Uveďte argumenty pro a proti!

Empirické měření: nevhodně

- Změřením obou programů (na stejném PC)

  `> time python3 program1.py`: real je 1.23s

  `> time python3 program2.py`: real je 1.21s

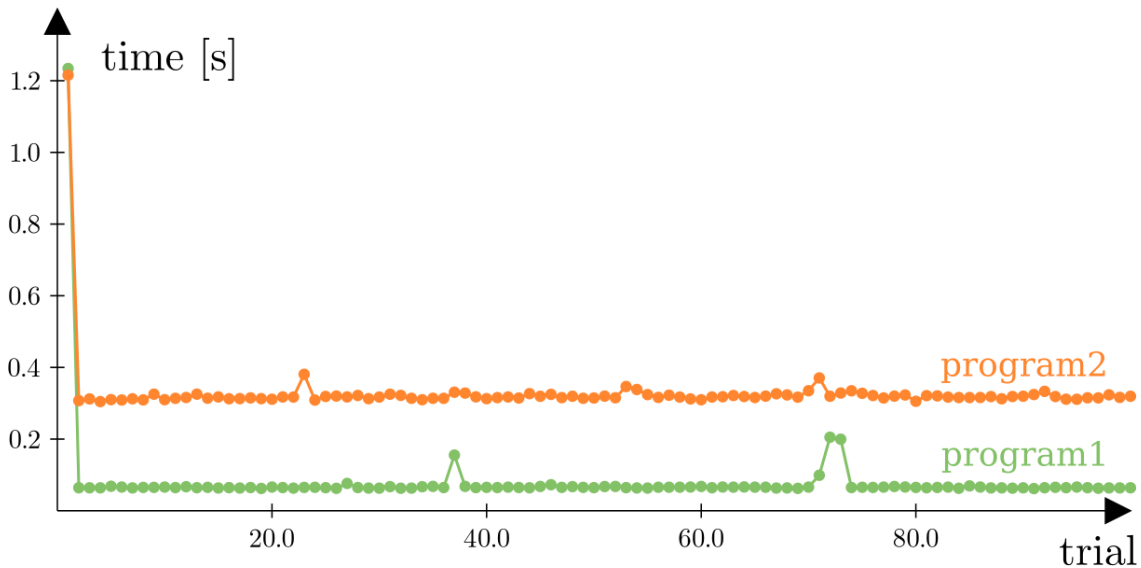
- Můžeme provést závěr, že `program2.py` je rychlejší, než `program1.py` ?

Proč je tento způsob řešení nevhodný

- Jednobodové měření — je zatíženo chybou (aktuální zatížení procesoru, disků . . .)
- Nutnost opakování měření a statistického porovnání

Empirické měření: správně

- Více měření (čím více, tím lépe), zde použijeme 100 měření
- `program1.py`: $\bar{t} = 0.0808$, $\sigma = 0.11$
- `program2.py`: $\bar{t} = 0.3283$, $\sigma = 0.089$
- V průměru je `program1.py` $\sim 4\times$ rychlejší než `program2.py`



Empirické měření: správně

- Důvodem pomalého běhu `program2.py` je importování knihovny numpy
- Knihovna numpy se ale nepoužívá
- `program1.py`

```
1 import insertionSort as IS
2 import random, time
3
4 a = [ random.random() for _ in range(1000) ]
5 IS.insertionSort(a)
```

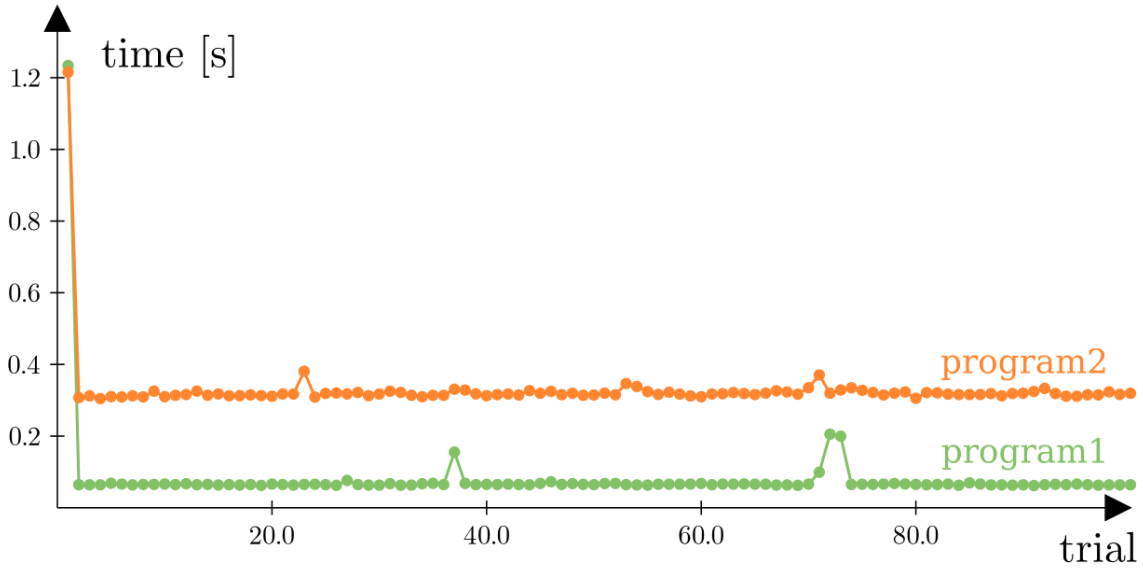
- `program2.py`

```
1 import insertionSort as IS
2 import random, time
3 import numpy
4 a = [ random.random() for _ in range(1000) ]
5 IS.insertionSort(a)
```

- Dobrá praxe: importujeme pouze knihovny, které používáme

Empirické měření: závěr

- Známe (průměrné) chování programu na vstupu velikosti $n = 1000$
- Průměr ze 100 měření
- Měření je validní pro jedno PC, nelze ho zobecnit
- Neznáme chování pro jinak velké vstupy a pro jiné PC/OS
- Empirické měření zkoumá vlastnosti programu, nikoliv algoritmů



Časová složitost (Time complexity)

- Způsob analýzy algoritmů
- Najdeme funkci $T(n)$, která popisuje časovou (nebo paměťovou) náročnost algoritmu
- Velikost vstupu je n
  - např. velikost vstupních polí pro seřazení
  - celkový počet bitů na vstupu
  - počet vrcholů/hran v grafech
  - velikost matic
  - atd. podle konkrétního algoritmu
- Funkce $T(n)$ nejčastěji popisuje
  - kolik “vybraných operací” se provede (časová náročnost)
  - kolik paměti (v RAM/HDD) bude třeba k vyřešení úlohy

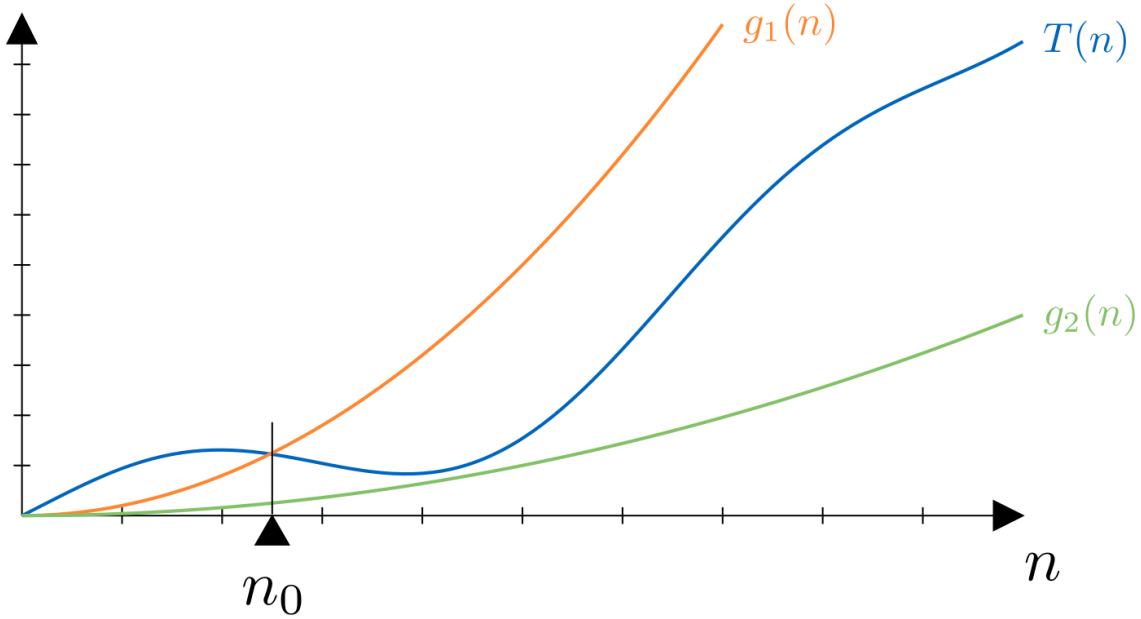
Asymptotická časová složitost

- Chování algoritmu $T(n)$ nás zajímá pouze pro velká $n \to \infty$
- Multiplikativní a aditivní konstanty zanedbáme
- Pomaleji rostoucí části $T(n)$ zanedbáme

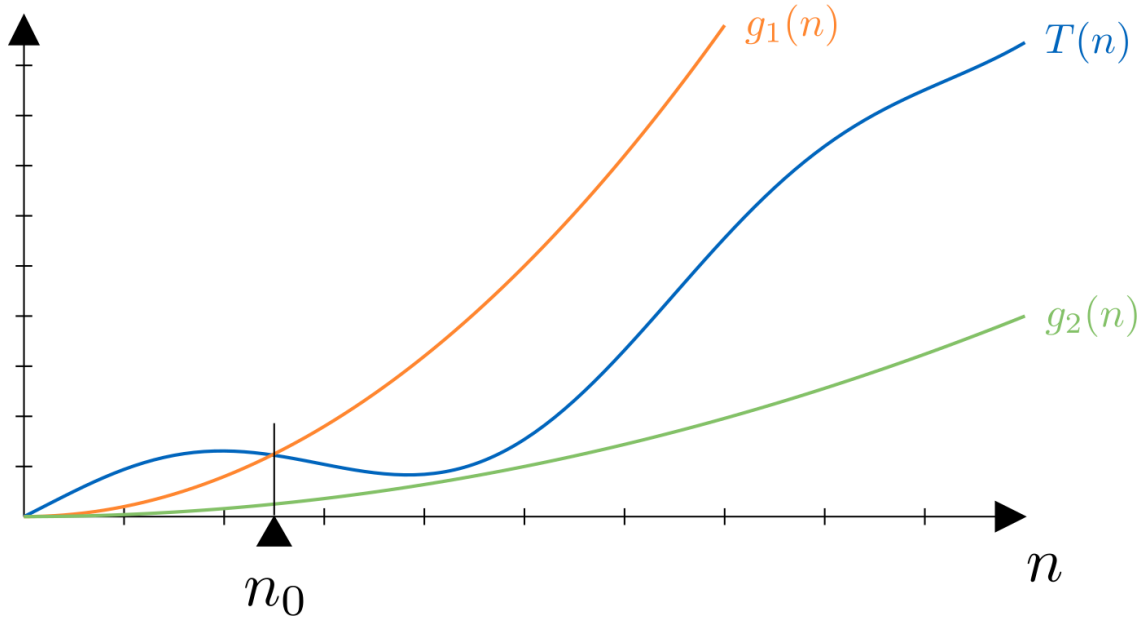
$\mathcal{O}()$: big-O notace

- Nechť $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$

  $f(n)$ je $\mathcal{O}(g(n))$ pokud existují konstanty $n_0 > 0$ *a* $c > 0$ takové, že $f(n) \leq cg(n)$ pro všechna $n \geq n_0$



- $g_2(n)$ není horní odhad $T(n)$
- $g_1(n)$ je horní odhad $T(n)$ pro $n \geq n_0$. $\Rightarrow$ $T(n)$ je $\mathcal{O}(g_1(n))$

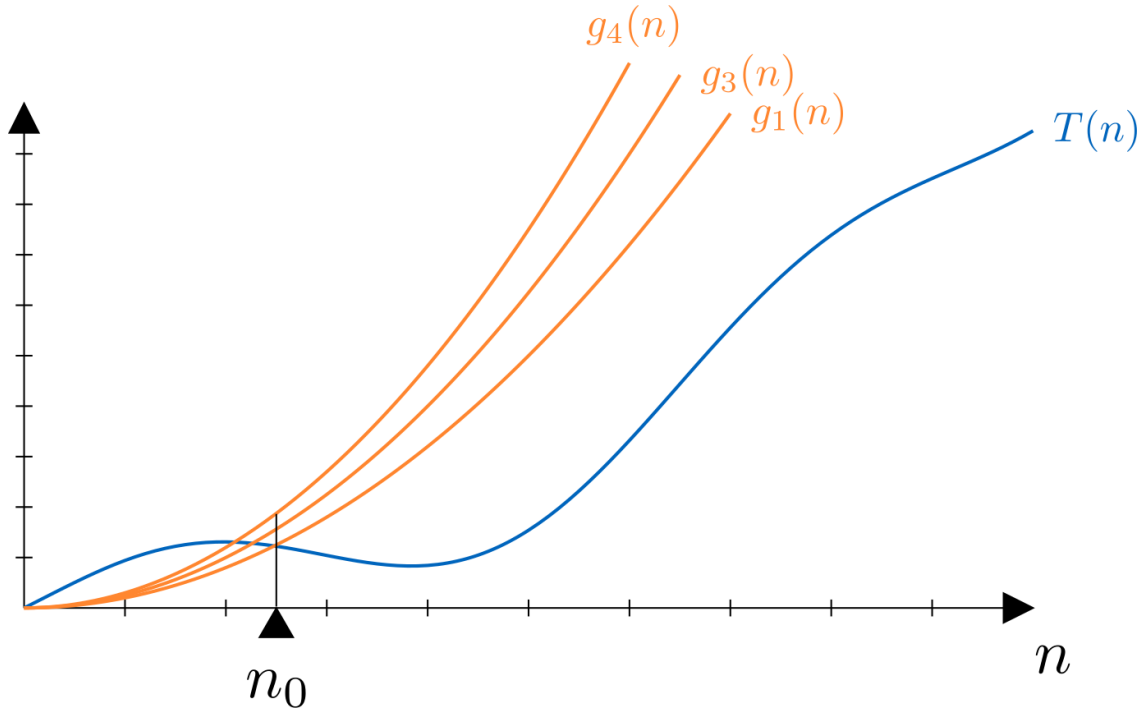


Příklad

- $T(n) = 2n^2 + 3 + 4n$
- $g_1(n) = n^2$ je horním odhadem $T(n)$ pro $n > n_0$
- Říkáme, že $T(n) = 2n^2 + 3 + 4n$ je $\mathcal{O}(n^2)$

$\mathcal{O}()$: big-O notace

- $T(n) = 2n^2 + 3 + 4n$
- $g_1(n) = n^2$ je horním odhadem $T(n)$
- Říkáme, že $T(n) = 2n^2 + 3 + 4n$ je $\mathcal{O}(n^2)$



- Odhadem $T(n)$ jsou i další funkce, např. $\mathcal{O}(n^3)$ nebo $\mathcal{O}(n^{100})$
- **Uvádíme ten nejlepší známý odhad**

$\mathcal{O}()$: big-O notace

$$f(n) \overset{n\to\infty}{\sim} g(n) \text{ pokud } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

- Místo f je $\mathcal{O}(n^3)$ píšeme $f \sim O(n^3)$

$f(n)$	$\sim g(n)$	$\mathcal{O}(n)$
$4n^2 + n$	$4n^2$	$\mathcal{O}(n^2)$
$4n^2 + n + 123456$	$4n^2$	$\mathcal{O}(n^2)$
$4n^2 + 10^6 n$	$4n^2$	$\mathcal{O}(n^2)$
$4n^2 + 0.01n^3$	$0.01n^3$	$\mathcal{O}(n^3)$
$n(n-1)(n-2)$	n^3	$\mathcal{O}(n^3)$
$4n^3 + 100n^2 + 1000n + 5000$	$4n^3$	$\mathcal{O}(n^3)$

- Pro polynomy uvažujeme jen člen nejvyššího řádu

$\mathcal{O}()$: big-O notace

$4n^3 + 100n^2 + 1000n + 5000$ je $\mathcal{O}(n^3)$

- Pokud $n \geq 100$, pak

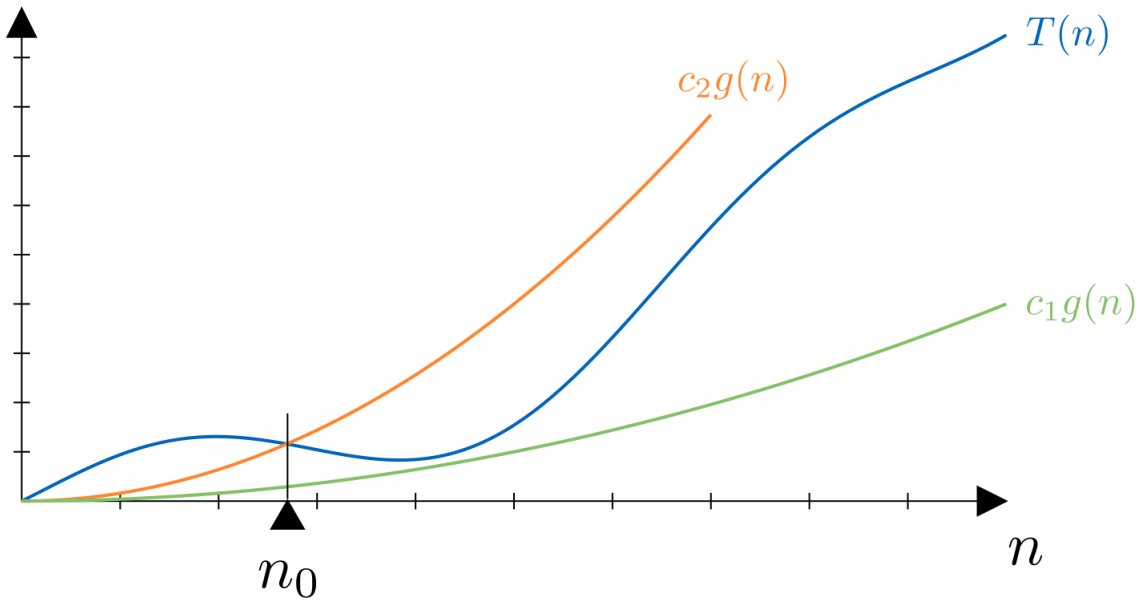
$\Rightarrow$ $n^3 \geq 100n^2$,

$\Rightarrow$ $n^3 \geq 1000n$,

$\Rightarrow$ $n^3 \geq 5000$

Asymptotická notace $\Theta()$

- Nechť $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$
  $f(n)$ je $\Theta(g(n))$ pokud existují konstanty $c_1 > 0, c_2 > 0$ a $n_o > 0$ takové, že $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ pro všechna $n \geq n_0$



- $4n^3 + 100n^2$ je $\mathcal{O}(n^3)$ ale i $\mathcal{O}(n^4)$, $\mathcal{O}(n^5)$, ...
- $4n^3 + 100n^2$ **je pouze** $\Theta(n^3)$, nikoliv $\Theta(n^4)$, $\Theta(n^5)$ ...

Asymptotická notace $\Theta()$

- $\mathcal{O}()$ notace

  $f(n)$ je $\mathcal{O}(g(n))$ pokud existují konstanty $n_0 > 0$ *a* $c > 0$ takové, že $f(n) \leq cg(n)$ pro všechna $n \geq n_0$

- $\Theta()$ notace

  $f(n)$ je $\Theta(g(n))$ pokud existují konstanty $c_1 > 0, c_2 > 0$ a $n_o > 0$ takové, že $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ pro všechna $n \geq n_0$

- $\Theta()$ přesnější, ale je těžší ji najít
- V praxi se používá převážně $\mathcal{O}()$

Druhy odhadů

- Průměrná složitost (Average complexity)
  - závisí na datech (co jsou “typická” data?)
  - složitá teoretická analýza
  - lze odhadnout experimentálně (vyžaduje znalost ‘typických’ dat)
- Nejhorší složitost (worst-case complexity)
  - lze odhadnout teoreticky
  - experimentálně nelze
- Složitost algoritmů může být závislá na více parametrech

Hledání prvků v poli

```
1 def findItem(x,query): #x is list
2     for item in x:
3         if item == query:
4             return True
5     return False
6
7 a = [0,1,0,2]
8 print( findItem(a, 0 ) )
9 print( findItem(a, "0") )
```

- Složitost $\mathcal{O}(n)$ (n je velikost vstupního pole)

Příklad určení složitosti

Hledání prvku půlením intervalu

```
1  def binarySearch(x, query):
2      L = 0
3      R = len(x)-1
4      while L <= R:
5          M = (L+R) // 2
6          if x[M] == query:
7              return M
8          if x[M] > query:
9              R = M-1
10         else:
11             L = M+1
12     return -1
```

- V každé iteraci zmenšujeme velikost prohledávaného intervalu na polovinu
- Složitost $\mathcal{O}(\log n)$

Příklad určení složitosti

BubbleSort

```
1  def bubbleSort(x): #x is list
2      for r in range(len(x)-1,0,-1): #r is used
3          change = False
4          for j in range(r):  #j = 0..r-1
5              if x[j] > x[j+1]:
6                  x[j],x[j+1] = x[j+1], x[j]
7                  change = True
8          if not change:
9              break
10 a = [ 10,-10,0,1,-3,4,4]
11 print(a)
12 bubbleSort(a)
13 print(a)
```

- Vnější smyčka proběhne n-krát, vnitřní smyčka proběhe nejvýše n-krát
- Složitost $\mathcal{O}(n^2)$

Příklad určení složitosti

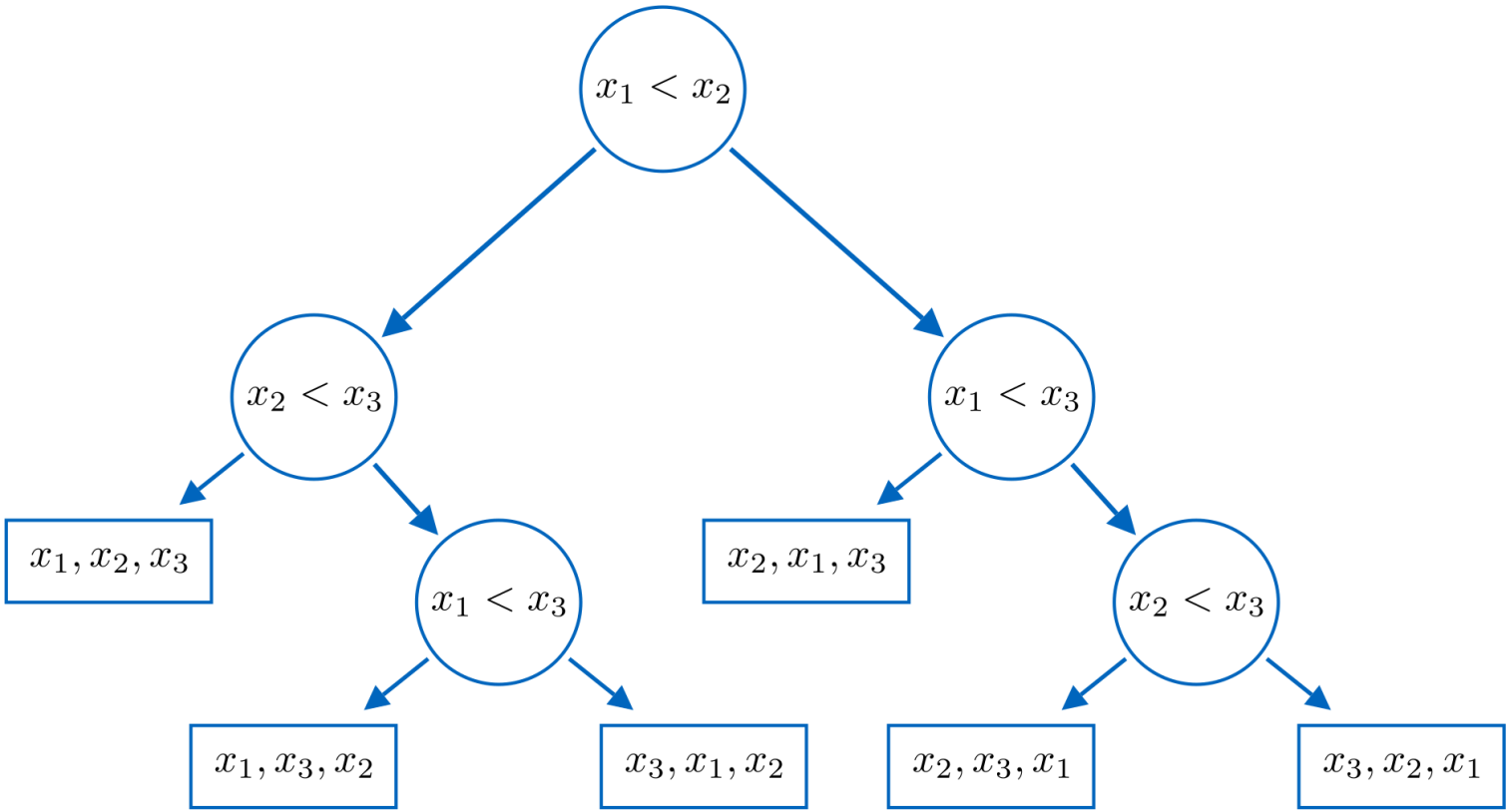
SelectionSort

```
1  def selectionSort(x): #x is list
2      for r in range(len(x)-1):
3          minidx = r
4          for j in range(r+1,len(x)):
5              if x[j] < x[minidx]:
6                  minidx = j
7          x[minidx], x[r] = x[r], x[minidx]
8
9  a = [7,42,-3,0,5,1,1]
10 selectionSort(a)
11 print(a)
```

- Složitost $\mathcal{O}(n^2)$

Složitost řazení

- Řadící algoritmy založené na porovnání (operátor $<$)
- Kolik těchto porovnání je třeba, aby se seřadilo pole n položek?
- Graf porovnání pro tři prvky x_1, x_2, x_3



Složitost řazení

- Počet listů je 2^h, kde h je hloubka rozhodovacího stromu
- Strom musí být schopen pro jakoukoliv vstupní permutaci udělat rozhodnutí $\rightarrow$ obsahovat list

$$\begin{aligned} n! &\leq 2^h \\ h &\geq \log_2 n! \end{aligned}$$

- Stirlingův vzorec

$$\log(n!) = n \log n - n + \mathcal{O}(\log n)$$

- Nejvyšší člen je zde $n \log n$
- **Porovnávací řadící algoritmus potřebuje nejméně $n \log n$ porovnání k seřazení pole n položek**
- Řazení (porovnávací) má složitost $\mathcal{O}(n \log n)$

Příklad určení složitosti


```
1 N = 100
2 i = N
3 b = 1
4 while i > 0:
5     b*=i
6     print(b,i)
7     i //= 2
```

- Půlíme interval N, $N/2$, $N/4$ atd..
- Složitost $\mathcal{O}(\log n)$

Příklad určení složitosti


```
1 N = 100
2 i = N
3 b = 1
4 while i > N//2:
5     b*=i
6     print(b,i)
7     i //= 2
```

- Složitost ?

Příklad určení složitosti


```
1  def f(n):
2      i = n
3      a = 0
4      while i > 0:
5          j = 0
6          for k in range(n):
7              j += k
8              a += 1
9              if j >= n:
10                 break
11         i = i // 2
12     return a
13
14 for n in range(10000):
15     print(n, f(n))
```

- Složitost ?

Příklad určení složitosti


```
1 n = 100
2 a = 1
3 for i in range(n):
4     for j in range(i,n):
5         a += 1
```

- Složitost ?

Příklad určení složitosti


```
1 n = 100
2 for a in range(1,n):
3     j = 1
4     while j < n:
5         j += a
```

- Složitost ?

Násobení matic

- Máme $n \times n$ matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a počítáme $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- Například pro matice 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

- kde $a_{ij}, b_{ij}, cij \in \mathbb{R}$
- Standardní násobení matic vyžaduje 8 násobení a 4 sčítání
- Násobení velkých čtvercových matic — Strassenův algoritmus

Násobení matic

- Máme $n \times n$ matice **A**, **B** a počítáme $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- Naivní algoritmus pro matice $n \times n$

```
1 #a,b,c are square matrices n x n
2 #c is assumed to be n x n matrix of zeros
3 for i in range(n):
4     for j in range(n):
5         for k in range(n):
6             c[i][j] += a[i][k] * b[k][j]
7 #result is in c
```

- Složitost $\mathcal{O}(n^3)$

Blokové násobení čtvercových matic

- Nechť máme matici, jejíž počet prvků je mocnina 2: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ jsou matice $2^k \times 2^k = n \times n$, kde $n = 2^k$
- Tyto matice lze reprezentovat po blocích
- $\mathbf{A}_{ij}$ jsou čtvercové matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

- Standardní násobení velkých matic (rekurzivně po blocích)
- 8 násobení čtvercových matic a 4 sčítání čtvercových matic

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

Strassenův algoritmus

- Nechť máme matici, jejíž počet prvků je mocnina 2: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ jsou matice $2^k \times 2^k = n \times n$, kde $n = 2^k$

$$\mathbf{M}_1 = (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22})(\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{22});$$
$$\mathbf{M}_2 = (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22})\mathbf{B}_{11};$$
$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{A}_{11}(\mathbf{B}_{12} - \mathbf{B}_{22});$$
$$\mathbf{M}_4 = \mathbf{A}_{22}(\mathbf{B}_{21} - \mathbf{B}_{11});$$
$$\mathbf{M}_5 = (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_{22};$$
$$\mathbf{M}_6 = (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{A}_{11})(\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{12});$$
$$\mathbf{M}_7 = (\mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{22})(\mathbf{B}_{21} + \mathbf{B}_{22}),$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{11} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_4 - \mathbf{M}_5 + \mathbf{M}_7$$
$$\mathbf{C}_{12} = \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_5$$
$$\mathbf{C}_{21} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4$$
$$\mathbf{C}_{22} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_6$$

- Strassenův algoritmus potřebuje 7 násobení
- Matice se rekurzivně násobí (blokově) až dojde na násobení matic 2×2
- Potřebuje ale více operací sčítání/odčítání

Příklad určení složitosti

Detekce kolizí mezi dvěma polygony

- Polygon je sekvence vrcholů
- Vstup: $P = ((x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n))$ a $Q = ((x_1, y_1), \ldots (x_m, y_m))$
- Detekce kolizí (naivně): pro každou úsečku z P spočítat, jestli má průnik s nějakou úsečkou z Q
- Nejsložitější operace je zde **výpočet průniku**

```
1 def isCollision(p,q): """ p,q are [[x1,y1], ... [x_n,y_n] ] """
2     for i in range(len(p) - 1): #(n-1)-times
3         for j in range(len(q) - 1): #(m-1)-times
4             r = isCrossing(p[i], p[i+1], q[j], q[j+1])
5             if r:
6                 return True
7     return False
```

- Vnější smyčka proběhne (nejvýše) $n - 1$ krát, vnitří smyčka proběhne (nejvýše) $m - 1$ krát.
- Počet volání `isCrossing()` je $(n - 1)(m - 1)$
- Složitost algoritmu je $\mathcal{O}(mn)$
- Kdy nastane případ ‘nejvýše’ ?

Srovnání složitostí

konstatní	$\mathcal{O}(1)$	nejrychlejší
logaritmická	$\mathcal{O}(\log n)$	velmi rychlá (např. binární půlení)
lineární	$\mathcal{O}(n)$	rychlá i pro velká data
	$\mathcal{O}(n \log n)$	srovnatelná s $\mathcal{O}(n)$
kvadratická	$\mathcal{O}(n^2)$	pomalejší než lineární, rychle roste s n
kubická	$\mathcal{O}(n^3)$	pomalá
polynomiální	$\mathcal{O}(n^k)$	pomalá
exponenciální	$\mathcal{O}(b^n)$	velmi pomalá
	$\mathcal{O}(n!)$	velmi pomalá

- Pro velká data se snažíme používat algoritmy s nejmenší složitostí
- Pro malá data lze (v oprávněných případech) použít algoritmus s mírně vyšší složitostí